Feuille 7
Produits tensoriels.

Si V, W sont deux $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, on note $V \otimes_a W$ leur produit tensoriel algébrique.

Dans toute la feuille, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ sont deux espaces de Hilbert complexes séparables. On définit sur $\mathcal{H} \otimes_a \mathcal{K}$ un produit scalaire par la formule

$$\langle x_1 \otimes y_1, x_2 \otimes y_2 \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle \cdot \langle y_1, y_2 \rangle.$$

Exercice 1. Vérifier que l'on a bien défini un produit scalaire.

On note $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ l'espace de Hilbert obtenu en complétant $\mathcal{H} \otimes_a \mathcal{K}$ pour ce produit scalaire.

Exercice 2. Montrer que si $(e_i)_{i \in I}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H}$ et $(f_j)_{j \in J}$ une base hilbertienne de $\mathcal{K}$, alors $(e_i \otimes f_j)_{i \in I, j \in J}$ est une base hilbertienne de $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$.

Soient $A \in B(\mathcal{H})$ et $B \in B(\mathcal{K})$. On définit un opérateur $A \otimes B$ sur $\mathcal{H} \otimes_a \mathcal{K}$ par

$$(A \otimes B)(x \otimes y) = (Ax) \otimes (By).$$

Exercice 3. Soient $A \in B(\mathcal{H})$ et $B \in B(\mathcal{K})$. Montrer que $A \otimes B$ s'étend en un opérateur borné sur $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$, toujours dénoté $A \otimes B$, et que

$$\|A \otimes B\| = \|A\| \|B\|.$$

Exercice 4. Soient $A \in B(\mathcal{H})$ et $B \in B(\mathcal{K})$. Pour chacune des propriétés suivantes, si A et B la vérifient, peut-on conclure que $A \otimes B$ aussi ?
(a) inversible. (b) auto-adjoint. (c) normal. (d) unitaire. (e) compact. (f) à trace.

Exercice 5. Montrer que

$$\mathrm{Vect}\{A \otimes B \ : \ A \in B(\mathcal{H}), B \in B(\mathcal{K})\}$$

est fortement dense dans $B(\mathcal{H} \otimes \mathcal{K})$. Est-il dense pour la topologie uniforme ?

Exercice 6. Si $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$ sont de dimension finie, est ce que tout opérateur autoadjoint sur $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ peut s'écrire de la forme

$$\sum_{i=1}^{N} \lambda_i A_i \otimes B_i$$

avec λ_i réels, et A_i (resp. B_i) des opérateurs auto-adjoints sur $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{K}$) ?

Exercice 7. Soient $A \in B(\mathcal{H})$ et $B \in B(\mathcal{K})$ deux opérateurs non nuls. On suppose $A \otimes B$ compact. Montrer que A et B sont compacts.

Exercice 8. Soient $A \in B(\mathcal{H})$ et $B \in B(\mathcal{K})$. On cherche à démontrer que

$$\sigma(A \otimes B) = \sigma(A) \cdot \sigma(B) := \{\lambda\mu \ : \ \lambda \in \sigma(A), \mu \in \sigma(B)\}.$$

1. Montrer le résultat si A et B sont normaux.
2. Soit $S \in B(\mathcal{H})$. On dit que $\lambda \in \sigma(S)$ est une valeur propre approximative de S si

$$\inf\{\|(S - \lambda \mathrm{Id})x\| \ : \ \|x\| = 1\} = 0.$$

   Montrer que l'ensemble des valeurs propres approximatives de S est fermé et contient $\partial\sigma(S)$.
3. On montre que $\sigma(A) \cdot \sigma(B) \subset \sigma(A \otimes B)$. Soit $\lambda \in \sigma(A)$ et $\mu \in \sigma(B)$. Montrer que $\lambda\mu \in \sigma(A \otimes B)$ dans chacun des cas suivants :
   (a) λ et μ sont des valeurs propres approximatives.
   (b) Ni λ ni μ n'est une valeur propre approximative (considérer les adjoints).
   (c) λ ou μ est nul.
   (d) Dans les autres cas.

   L'inclusion réciproque est également vraie et découle de la théorie de Gelfand de représentation des sous-algèbres commutatives de $B(\mathcal{H})$.

Soient maintenant A et B deux opérateurs non bornés à domaine dense, respectivement sur $\mathcal{H}$ et $\mathcal{K}$.

Exercice 9. Si A et B sont fermables, montrer que l'on définit un opérateur fermable à domaine dense $A \otimes B$ par la formule

$$(A \otimes B)(x \otimes y) = Ax \otimes By.$$

(on dénote par $A \otimes B$ la fermeture de cet opérateur).

Exercice 10. Si A et B sont auto-adjoints, montrer que $A \otimes B$ l'est aussi.