Université Claude Bernard Mathématiques
Agrégation — préparation à l'écrit d'analyse.

Feuille 12
Probabilités (2)

Exercice 1. On considère une suite $(X_k)_{k\geqslant 1}$ de variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi ; on note F la fonction de répartition commune des X_k, $F(x) = \mathbf{P}(X_k \leqslant x)$. On va étudier la variable aléatoire

$$M_n = \max(X_1, \ldots, X_n).$$

On note G_n la fonction de répartition de M_n et on introduit $x_0 = \inf\{x : F(x) = 1\}$. Noter que x_0 peut être égal à $+\infty$.

1. Montrer que
$$G_n(x) = F(x)^n.$$
2. On suppose que $x_0 < +\infty$; montrer que M_n tend en probabilité vers x_0.
3. On suppose que $x_0 = +\infty$; montrer que pour tout $A > 0$, $\mathbf{P}(M_n \leqslant A)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini (on dit que M_n tend en probabilité vers $+\infty$).

Dans toute la suite, on suppose que les variables X_k suivent une loi exponentielle de paramètre $\alpha > 0$, dont la densité est $x \mapsto \alpha \exp(-\alpha x)\mathbf{1}_{\mathbf{R}^+}(x)$. On introduit la variable aléatoire

$$Z_n = \alpha M_n - \ln n.$$

4. Montrer que
$$\mathbf{P}(Z_n \leqslant x) = \left(1 - \frac{1}{n}e^{-x}\right)^n.$$
5. En déduire que Z_n converge en loi vers une variable aléatoire de fonction de répartition
$$H(x) = e^{-e^{-x}}.$$

Exercice 2. On va montrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité μ sur $\mathbf{N}$ ayant la propriété suivante : si X est une variable aléatoire de loi μ, alors pour tout entier n

$$\mathbf{P}(n \text{ divise } X) = \frac{1}{n}.$$

On suppose par l'absurde qu'une telle mesure existe.

1. Montrer que les événements $\{$« p divise X » : p premier$\}$ sont indépendants.
2. Soit p_n le $n$ème nombre premier. Á l'aide du lemme de Borel–Cantelli, monrer que la série $\sum p_n$ converge.
3. Il existe donc un entier k tel que $\sum_{n=k+1}^{\infty} p_n < 1/2$. Soit $q \in \mathbf{N}$, et soit M_q l'ensemble des nombres de $\{1, \ldots, q\}$ dont tous les facteurs premiers sont inférieurs ou égaux à p_k.
   (a) Montrer que M_q a au plus $2^k\sqrt{q}$ éléments.
   (b) Montrer que M_q a au moins $q/2$ éléments, et conclure.