Feuille 14
Compacité

Révisions de cours pour la séance prochaine :

1. Transformation de Fourier.

Exercice 1. Soit X et Y deux espaces métriques, et $f : X \to Y$ une bijection continue. On suppose X compact. Montrer que f est un homéomorphisme.

Exercice 2. Théorème de Dini
Soit (K, d) un espace métrique compact, et (f_n) une suite croissante d'éléments de $C(K)$. On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction continue f. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 3. Théorème de Tychonoff dénombrable
Soit (E_n, d_n) une suite d'espaces métriques non vides et $E = \prod E_n$ muni de la topologie produit. On introduit sur E la distance d définie pour $x, y \in E$ par

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n} \frac{d_n(x_n, y_n)}{1 + d_n(x_n, y_n)}.$$

1. Montrer que $\delta_n = d_n/(1 + d_n)$ est une distance sur E_n qui induit la même topologie que d_n, et que la topologie associée à d est la topologie produit.
2. Montrer que (E, d) est compact si et seulement si (E_n, d_n) est compact pour tout n.

Exercice 4. Théorème de Carathéodory

1. Soient $x_1, \ldots, x_p$ dans $\mathbf{R}^n$ avec $p > n + 1$. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ non tous nuls vérifiant à la fois $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 0$ et $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0$ (on dit que les points $x_1, \ldots, x_p$ sont affinement liés).
2. Soit $A \subset \mathbf{R}^n$ et $\mathrm{conv}(A)$ l'enveloppe convexe de A. Montrer que tout élément de $\mathrm{conv}(A)$ s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $n + 1$ éléments de A.
3. Soit $A \subset \mathbf{R}^n$ compact. Montrer que $\mathrm{conv}(A)$ est compact.

Exercice 5. Espaces de fonctions hölderiennes
Soit $\alpha > 0$. Pour une fonction $f : [0, 1] \to \mathbf{R}$, on pose

$$\|f\|_\alpha = \sup_{0 \leqslant x \neq y \leqslant 1} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

On dit que f est α-hölderienne si $\|f\|_\alpha < \infty$.

1. Montrer que si $\alpha > 1$, toute fonction α-hölderienne de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ est constante. Dans la suite on supposera $0 < \alpha < 1$.
2. On note $C^\alpha([0, 1])$ l'espace des fonctions α-hölderiennes de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que $C^\alpha([0, 1])$ est un espace de Banach quand il est muni de la norme $\|\cdot\|_\alpha + \|\cdot\|_\infty$.
3. Montrer que la boule-unité de $C^\alpha([0, 1])$ est relativement compacte dans $C([0, 1])$.
4. Soit $0 < \alpha < \beta < 1$.
   (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a l'inégalité
   $$\|f\|_\alpha \leqslant \max(\|f\|_\beta \varepsilon^{\beta-\alpha}, 2\|f\|_\infty \varepsilon^{-\alpha}).$$
   (b) En déduire que la boule-unité de $C^\beta([0, 1])$ est relativement compacte dans $C^\alpha([0, 1])$.

Exercice 6. Distance de Hausdorff

Soit (X, d) un espace métrique complet. Pour $A \subset X$ et $\varepsilon > 0$, on note

$$A_\varepsilon = \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon).$$

On note $K(X)$ l'ensembles des compacts non vides de X.

1. Montrer que l'on définit une distance D sur $K(X)$ en posant

$$D(A, B) = \inf\{\varepsilon > 0 \,:\, A \subset B_\varepsilon \text{ et } B \subset A_\varepsilon\}.$$

2. Montrer que $(K(X), D)$ est complet.
3. Montrer que X est compact si et seulement si $K(X)$ est compact.