Feuille 15
Transformation de Fourier

Exercice 1. Définition
Pour $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$, on définit $\mathcal{F}f$ (aussi noté $\hat{f}$) par la formule ($\xi \in \mathbf{R}^d$)

$$(\mathcal{F}f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i\langle x,\xi\rangle} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

De la même manière, si μ est une mesure finie sur $\mathbf{R}^d$, on pose

$$\hat{\mu}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i\langle x,\xi\rangle}\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Montrer que $\hat{f}$ et $\hat{\mu}$ définissent des fonctions continues bornées. Sont-elles uniformément continues ?

Exercice 2. Continuité des translations dans L^1
Si $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ est une fonction mesurable, et $y \in \mathbf{R}^d$, on note $\tau_y f(x) = f(x-y)$. Montrer que pour $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$, l'application $y \mapsto \tau_y f$ est continue de $\mathbf{R}^d$ dans $L^1(\mathbf{R}^d)$.
Indication. *Les fonctions continues à support compact forment une partie dense de* $L^1(\mathbf{R}^d)$.

Exercice 3. Lemme de Riemann–Lebesgue
Montrer la formule, pour $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ et $\xi \in \mathbf{R}^d$ ($\xi \neq 0$)

$$2\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{-i\langle x,\xi\rangle} \left(f(x) - f\left(x - \frac{\pi\xi}{|\xi|^2} \right) \right) \mathrm{d}x.$$

A l'aide de l'exercice précédent, montrer que si $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$, alors $\hat{f}$ tend vers 0 à l'infini.
Si μ est une mesure finie, est-ce que $\hat{\mu}$ tend vers 0 à l'infini ?

Exercice 4. Propriétés élémentaires

1. **Translations**. Si $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ est mesurable et $y \in \mathbf{R}^d$, on note $e_y f$ la fonction $x \mapsto e^{i\langle x,y\rangle} f(x)$. Pour $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$, calculer $\mathcal{F}(e_y f)$ et $\mathcal{F}(\tau_y f)$.
2. **Dérivation**. Sous des hypothèses à préciser sur f, montrer que si $1 \leqslant j \leqslant d$, alors (i) $\frac{\partial \hat{f}}{\partial \xi_j} = \mathcal{F}\left(x \mapsto -ix_j f(x)\right)$ et (ii) $\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(\xi) = i\xi_j \hat{f}(\xi)$ (on pourra traiter le cas $d = 1$ pour commencer).
3. **Convolution**. Pour $f, g \in L^1(\mathbf{R}^d)$, on note $f * g$ la fonction $x \mapsto \int_{\mathbf{R}^d} f(y)g(x-y)\,\mathrm{d}y$. Calculer $\widehat{f * g}$.

Exercice 5. Le cas des gaussiennes
Pour $\sigma > 0$, on note g_σ la densité d'une variable aléatoire de loi $N(0, \sigma^2\mathrm{Id})$, donnée par la formule

$$g_\sigma(x) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{d/2}} \exp(-|x|^2/2\sigma^2).$$

Montrer que pour tout $\xi \in \mathbf{R}^d$,

$$\widehat{g_\sigma}(\xi) = \exp(-\sigma^2|\xi|^2/2) = \left(\frac{2\pi}{\sigma^2}\right)^{d/2} g_{1/\sigma}(\xi).$$

Indication. *On se ramènera au cas $d = 1$ et $\sigma = 1$ et on montrera que $\widehat{g_1}$ vérifie une équation différentielle.*

Exercice 6. La formule d'inversion

1. Si $f, g \in L^1(\mathbf{R}^d)$, montrer l'égalité

$$\int_{\mathbf{R}^d} f(x)\hat{g}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbf{R}^d} \hat{f}(\xi)g(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

2. Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ une fonction telle que $\hat{f} \in L^1(\mathbf{R}^d)$. Montrer que pour presque tout $x \in \mathbf{R}^d$, on a

$$f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{i\langle x,\xi\rangle} \hat{f}(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

   Indication. *Montrer d'abord la formule pour la fonction $f * g_\sigma$ puis utiliser le fait que $f * g_\sigma$ converge vers f dans L^1 lorsque σ tend vers 0.*

Exercice 7. Transformée de Fourier L^2

On note $E = L^1(\mathbf{R}^d) \cap L^2(\mathbf{R}^d)$, muni de la norme induite par $L^2(\mathbf{R}^d)$. Montrer que l'application $(2\pi)^{-d/2}\mathcal{F} : E \to E$ est une isométrie et en déduire qu'elle s'étend de manière unique à une isométrie bijective de $L^2(\mathbf{R}^d)$.