Feuille 16
Opérateurs compacts

Dans toute la feuille X, Y, Z sont des espaces de Banach. On note B_X la boule-unité fermée de l'espace X. On note $L(X, Y)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues (aussi appelées opéateurs) de X dans Y. On dit que $T \in L(X, Y)$ est un opérateur compact si $\overline{T(B_X)}$ est compact dans Y.

Exercice 1.
Montrer qu'un opérateur de rang fini est compact.

Exercice 2.
Soit $S \in L(X, Y)$ et $T \in L(Y, Z)$. Montrer que si S ou T est compact, alors TS est compact.

Exercice 3.
On note $K(X, Y)$ l'ensemble des opérateurs compacts de X dans Y. Montrer que $K(X, Y)$ est un sous-espace fermé de $L(X, Y)$.

Indication : On pourra utiliser le fait suivant (et, encore mieux : le démontrer). *Soit E un espace métrique complet. Une partie $A \subset E$ est relativement compacte si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, A peut-être recouverte par un nombre fini de boules de rayon ε.*

Exercice 4.
Pour $1 \leqslant p \leqslant \infty$, on note ℓ_p l'espace des suites de puissance p-ème sommable (ou des suites bornées pour $p = +\infty$) muni de la norme usuelle

$$\|(x_n)_{n\geqslant 1}\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{1/p} & \text{si } 1 \leqslant p < \infty \\ \sup_{1\leqslant n\leqslant\infty} |x_n| & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $(\lambda_n)_{n\geqslant 1} \in \ell_\infty$, on considère l'application linéaire $T : \ell_p \to \ell_p$ définie par $T((x_n)_{n\geqslant 1}) = (\lambda_n x_n)_{n\geqslant 1}$. Vérifier que T est continue, puis montrer l'équivalence

$$T \text{ compact} \iff \lim_{n\to\infty} \lambda_n = 0.$$

Exercice 5.
On note $X = C([0, 1])$ l'espace des fonctions continues sur $[0, 1]$, muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. On fixe $g \in X$. Pour $f \in X$ et $x \in [0, 1]$, on pose

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que T définit un opérateur compact sur $C([0, 1])$.

Exercice 6.
On note $X = L^2([0, 1]^2)$. Soit $k : [0, 1]^2 \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Montrer que l'on définit un opérateur compact T sur X en posant

$$(Tf)(x) = \int_0^1 k(x, y)f(y)\,\mathrm{d}y,$$

où $f \in X$ et $x \in [0, 1]$.