Feuille 2
Théorie de la mesure et intégration.

Révisions de cours pour la séance prochaine :

1. Espaces de Hilbert : définition, inégalité de Cauchy–Schwarz, espace dual (théorème de représentation de Riesz), bases hilbertiennes.

Exercice 1. Déterminer les limites suivantes (valant éventuellement $+\infty$)

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1-\frac{x}{n}\right)^n e^{x/2}\,\mathrm{d}x \text{ et } \lim_{n\to\infty} \int_1^\infty \frac{1}{x(x^2+1)^{1/n}}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2. Donner un sens à l'énoncé suivant, puis le prouver : si $f : [0,1] \to \mathbf{R}^+$ est une fonction intégrable, alors $\int_{[0,1]} f\,\mathrm{d}m$ est l'aire comprise entre l'axe des abscisses et le graphe de f (on note m la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$).

Exercice 3. Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré, et $f : X \to \mathbf{R}$ une fonction intégrable.

1. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \int |f| \mathbf{1}_{\{|f|>n\}}\,\mathrm{d}\mu = 0.$$
2. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $A \in \mathcal{F}$,
$$\mu(A) \leqslant \delta \Longrightarrow \int_A |f|\,\mathrm{d}\mu \leqslant \varepsilon.$$

Exercice 4. En utilisant le théorème de Fubini et l'égalité $\frac{1}{x} = \int_0^\infty e^{-xt}\,\mathrm{d}t$ valable pour $x > 0$, calculer la valeur de l'intégrale de Dirichlet
$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 5. Variation totale (extrait sujet 2003, remanié)

Soit $n \in \mathbf{N}^*$. On appelle *densité* une fonction borélienne de $[0,1]^n$ dans $\mathbf{R}^+$ dont l'intégrale vaut 1. Si q et r sont deux densités, on pose

$$d_{VT}(q,r) = \sup_{0\leqslant f\leqslant 1} \left| \int_{[0,1]^n} f(x)q(x)\,\mathrm{d}x - \int_{[0,1]^n} f(x)r(x)\,\mathrm{d}x \right|,$$

où le supremum est pris sur toutes les fonctions boréliennes de $[0,1]^n$ dans $[0,1]$. Montrer que

$$d_{VT}(q,r) = \frac{1}{2} \int_{[0,1]^n} |q(x) - r(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 6. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $O \subset \mathbf{R}$ dense et vérifiant $m(O) \leqslant \varepsilon$ (où m désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{R}$).

Exercice 7. Théorème d'Egoroff

Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(X) < +\infty$ et (f_n) une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbf{R}$, convergeant simplement vers une fonction f. Le but de l'exercice est de montrer que pout tout $\varepsilon > 0$, il existe $A \in \mathcal{F}$ tel que $\mu(A) < \varepsilon$ et (f_n) converge vers f uniformémént sur $X \setminus A$.

1. On pose pour $k \in \mathbf{N}^*$ et $n \in \mathbf{N}$,

$$E_n^k = \bigcap_{p \geqslant n} \{x \in X \text{ t.q. } |f_p(x) - f(x)| \leqslant 1/k\}.$$

   Montrer que $E_n^k \in \mathcal{F}$. Quelle relation y a-t-il entre E_n^k et E_{n+1}^k ? entre E_n^k et E_n^{k+1} ?

2. Montrer que $\forall k \in \mathbf{N}^*$, $X = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} E_n^k$. En déduire que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall k \in \mathbf{N}^*,\ \exists n_k \in \mathbf{N} \text{ t.q. } \mu(X \setminus E_{n_k}^k) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^k}.$$

3. Conclure.