Université Claude Bernard — Mathématiques

Agrégation — préparation à l'écrit d'analyse.

Feuille 3

Espaces de Hilbert.

Révisions de cours pour la séance prochaine :

1. Espaces L^p : définition (attention à la différence entre $\mathcal{L}^p$ et L^p). Inégalités de Minkowski, Hölder et Jensen.

Dans toute la feuille d'exercices, H désigne un espace de Hilbert réel et sa norme est notée $\|\cdot\|$.

Exercice 1. Identité du parallélogramme

1. Montrer l'égalité suivante, dite *identité du parallélogramme* (pourquoi ?), valable pour $x, y \in H$
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right). \tag{1}$$
2. (*) Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach tel que l'identité (1) est satisfaite pour tous x, y dans X. Montrer que X est un espace de Hilbert.
Indication. *Considérer la fonction* $B : (x,y) \mapsto \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$ *et montrer que* $B(x,y) = B(y,x)$, $B(x,-y) = -B(x,y)$ *et* $B(x+y,z) = B(x,z) + B(y,z)$ *— pour ce dernier point appliquer* (1) *à* (x,y), $(x+z, y+z)$ *et* $(x+y+z, z)$.

Exercice 2. Opérateur adjoint

Soit $T : H \to H$ une application linéaire continue. On rappelle que la norme d'opérateur de T est définie comme $|||T||| = \sup\{\|Tx\| : x \in H, \|x\| \leqslant 1\}$.

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $T^* : H \to H$ telle que, pour tous $x, y \in H$, on a
$$\langle T(x), y\rangle = \langle x, T^*(y)\rangle$$
2. Montrer que $|||T^*||| = |||T|||$ et que $(T^*)^* = T$.
3. (*) On suppose que $T = T^*$. Montrer que $||T|| = \sup\{|\langle Tx, x\rangle| : x \in H, \|x\| \leqslant 1\}$.

Exercice 3. Théorème de projection sur un convexe fermé

Soit $C \subset H$ un convexe fermé non vide.

1. Montrer que pour tout $x \in H$ il existe un unique élément $y \in C$ (noté $P_C(x)$ par la suite) tel que
$$\|x - y\| = \inf\{\|x - z\| : z \in C\}.$$
Indication : *considérer une suite* (y_n) *dans* C *approchant l'infimum et montrer qu'elle converge en appliquant* (1) *à* $(x - y_n, x - y_q)$.
2. Soit $x \in H$. Montrer que $P_C x$ est caractérisé comme étant l'unique point $y \in C$ vérifiant
$$\langle z - y, x - y\rangle \leqslant 0$$
pour tout $z \in C$.
3. Montrer que l'application $P_C : H \to H$ ainsi définie est continue. Montrer qu'elle est linéaire si et seulement si C est un sous-espace de H.
4. Application. Soit $a < b$ deux réels. Dans l'espace de Hilbert $H = L^2([0,1])$, on considère le sous-ensemble
$$C = \{f \in L^2([0,1]) : a \leqslant f \leqslant b \text{ presque partout}\}.$$
Vérifier que C est convexe et fermé, et déterminer $P_C g$ pour $g \in H$.

Exercice 4.

Soit $a : H \times H \to \mathbf{R}$ une forme bilinéaire symétrique, continue et coercive (c'est-à-dire telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $a(x,x) \geqslant \alpha \|x\|^2$ pour tout $x \in H$). On se donne également une forme linéaire continue $\ell : H \to \mathbf{R}$.

1. Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tous $x, y \in H$, on ait
$$|a(x,y)| \leqslant M\|x\|\|y\|.$$
2. Montrer le théorème de Lax–Milgram : il existe un unique $u \in H$ tel que l'on ait $a(u,v) = \ell(v)$ pour tout $v \in H$.
3. Soit $V \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé et soit u la solution de $a(u,v) = \ell(v)$ pour tout $v \in H$.
   (a) Montrer qu'il existe un unique $u_0 \in V$ vérifiant $a(u_0, v) = \ell(v)$ pour tout $v \in V$. Montrer que $\|u_0\| \leqslant |||\ell|||/\alpha$.
   (b) Montrer l'inégalité
$$\|u - u_0\| \leqslant \frac{M}{\alpha} \inf\{\|u - v\| : v \in V\}.$$