Université Claude Bernard — Mathématiques

Agrégation — préparation à l'écrit d'analyse.

Feuille 4

Espaces L^p.

Révisions de cours pour la séance prochaine :

1. Intégrales à paramètre (continuité, dérivabilité).
2. Convolution.

Exercice 1. Interpolation

1. Montrer que si $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ et $f \in L^p(\mathbf{R}) \cap L^q(\mathbf{R})$, alors $f \in L^r(\mathbf{R})$ pour tout $r \in [p, q]$ et que
$$\|f\|_r \leqslant \|f\|_p^\alpha \|f\|_q^{1-\alpha},$$
où $\alpha \in [0,1]$ est défini par la relation $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$.
2. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ mesurable. En déduire que l'ensemble
$$A_f = \{p \in [1, \infty] : f \in L^p(\mathbf{R})\}$$
est un intervalle de $[1, \infty]$.

Exercice 2. Continuité de la norme comme fonction de p

Soit f une fonction intégrable et bornée sur $\mathbf{R}$. Montrer que l'application $p \mapsto \|f\|_p$ est continue sur $[1, \infty)$, et que
$$\lim_{p \to \infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Exercice 3. La convergence dans L^p entraîne la convergence presque partout d'une sous-suite

Soit $p \in [1, \infty]$, et (f_n) une suite de fonctions dans $L^p(\mathbf{R})$ tendant vers f dans L^p, c'est-à-dire telle que
$$\lim_{n \to \infty} \|f - f_n\|_p = 0.$$

1. Montrer qu'il existe une sous-suite (f_{n_k}) qui converge presque partout vers f.
Indication : *Choisir (n_k) telle que la série $\sum_k \|f_{n_k} - f\|_p^p$ converge.*
2. Donner un exemple où (f_n) ne converge pas presque partout.

Exercice 4. Inclusions

Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré.

1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
   (a) $\mu(X) < \infty$,
   (b) Pour tous $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, on a $L^p(X, \mathcal{F}, \mu) \supset L^q(X, \mathcal{F}, \mu)$.
2. (*) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
   (a) Il existe $\varepsilon > 0$, tel que tout $A \in \mathcal{F}$ vérifiant $\mu(A) > 0$ vérifie en fait $\mu(A) \geqslant \varepsilon$.
   (b) Pour tous $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, on a $L^p(X, \mathcal{F}, \mu) \subset L^q(X, \mathcal{F}, \mu)$.

Indication : *pour montrer que (2b) implique (2a), on pourra utiliser le théorème du graphe fermé, dont on rappelle l'énoncé : une application linéaire entre espaces de Banach dont le graphe est fermé est continue.*

Exercice 5. Fonctions de référence

On note $|\cdot|$ la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^n$. A quelles conditions sur $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$ et $p \in [1, \infty]$ est-ce que la fonction f définie sur $\mathbf{R}^n$ par
$$f(x) = \frac{1}{(1 + |x|^\alpha)(1 + |\ln|x||)^\beta}$$
est dans $L^p(\mathbf{R}^n)$?