Feuille 5

Convolution.

Révisions de cours pour la séance prochaine (après les vacances) :

1. Fonctions holomorphes : équations de Cauchy–Riemann. Intégrale le long d'un chemin.
2. Formules de Cauchy. Principe du prolongement analytique. Principe du maximum.

Soit f et g deux fonctions boréliennes de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}$. On dit qu'elles sont convolables si, pour presque tout $x \in \mathbf{R}^d$, la fonction $y \mapsto f(y)g(x-y)$ appartient à L^1. Si f et g sont convolables, on définit leur produit de convolution $f * g$ presque partout par la formule

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbf{R}^d} f(x-y)g(y)\mathrm{d}y.$$

Exercice 1. Échauffement

Montrer que la convolution est commutative.

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$. Calculer $f * f$. À quoi ressemble $\underbrace{f * \cdots * f}_{12345 \text{ fois}}$?

Exercice 2. Inégalité de Young

Soient $p, q \in [1, \infty]$ tels que $1/p + 1/q \geqslant 1$. On définit $r \in [1, \infty]$ par $1/r = 1/p + 1/q - 1$. On souhaite montrer que si $f \in L^p(\mathbf{R}^d)$ et $g \in L^q(\mathbf{R}^d)$, alors f et g sont convolables, $f * g \in L^r(\mathbf{R}^d)$ et

$$\|f * g\|_r \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

1. Montrer le résultat lorsque $r = 1$.
2. Montrer le résultat lorsque $r = \infty$.
3. Montrer la variante suivante de l'inégalité de Hölder : si $f_1 \in L^\alpha, f_2 \in L^\beta$ et $f_3 \in L^\gamma$ avec $\alpha^{-1} + \beta^{-1} + \gamma^{-1} = 1$, alors
$$\|f_1 f_2 f_3\|_1 \leqslant \|f_1\|_\alpha \|f_2\|_\beta \|f_3\|_\gamma.$$
4. On considère maintenant le cas où $1 < r < \infty$. Écrire
$$f(x-y)g(y) = f^{p/r}(x-y)g^{q/r}(y)f^{1-p/r}(x-y)g^{1-q/r}(y)$$
et conclure en appliquant la question précédente.

Exercice 3. Approximations de l'unité

On note $|\cdot|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbf{R}^d$. On considère une *suite régularisante*, c'est-à-dire une suite de fonctions (ρ_k) de classe C^∞ de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}^+$ telle que

(i) $\rho_n(x) = 0$ si $|x| > 1/n$.

(ii) $\int \rho_n(x)\mathrm{d}x = 1$.

1. Soit ρ la fonction définie sur $\mathbf{R}^d$ par
$$\rho(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant 1. \end{cases}$$
On admet que ρ est de classe C^∞. Construire une suite régularisante à l'aide de ρ.
2. Soit $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ continue. Montrer que ρ_n et f sont convolables, puis que $\rho_n * f$ converge vers f uniformément sur tout compact.

3. Soit $f \in L^p$ pour $1 \leqslant p < \infty$. Montrer que $\rho_n * f$ converge vers f dans L^p (on utilisera le fait que les fonctions continues à support compact sont denses dans L^p).
4. Soit f une fonction intégrable et g une fonction de classe C^1 à support compact. Montrer que f et g sont convolables, que $f * g$ est de classe C^1 et que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$, on a
$$\frac{\partial(f * g)}{\partial x_i} = f * \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$
5. Montrer que les fonctions C^∞ à support compact forment une partie dense de L^p si $1 \leqslant p < \infty$. Cela reste-t-il vrai pour L^∞ ?

Exercice 4. Équation de la chaleur

Pour tout $t > 0$ et $x \in \mathbf{R}$, on note
$$G_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{1/2}} \exp(-x^2/4t)$$
la densité d'une loi gaussienne centrée de variance $2t$. Soit $f \in L^p(\mathbf{R})$ pour $1 \leqslant p < \infty$. Montrer que $u_t = G_t * f$ est solution de l'équation de la chaleur avec donnée initiale f, c'est à dire que
$$\frac{\partial u_t(x)}{\partial t} - \frac{\partial^2 u_t(x)}{\partial x^2} = 0 \quad \text{pour } (t,x) \in]0,\infty[\times\mathbf{R}$$
et que u_t converge vers f dans L^p lorsque t tend vers 0.

Référence : Brézis, Analyse Fonctionnelle.