Université Claude Bernard — Mathématiques

Agrégation — préparation à l'écrit d'analyse.

Feuille 6

Analyse complexe.

Révisions de cours pour la séance prochaine :

1. Fonctions méromorphes.
2. Calculs d'intégrale par la méthode des résidus.

Dans toute la feuille, on désigne par Ω un ouvert de $\mathbf{C}$, et par $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω. On note $D(x,r)$ (respectivement $\overline{D}(x,r)$) le disque fermé (respectivement ouvert) de centre x et de raydon r.

Exercice 1. Inégalités de Cauchy

Soit $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et $z_0 \in \Omega$. On rappelle que f admet un développement en série entière au voisinage de z_0 de la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n. \tag{1}$$

Soit R tel que $D(z_0, R) \subset \Omega$. On rappelle également que le rayon de convergence de la série entière (1) est au moins R.

1. Soit $r < R$. Montrer que pout tout entier n, on a

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} \, \mathrm{d}\theta.$$

2. Établir les inégalités de Cauchy :

$$|a_n| \leqslant \frac{1}{r^n} \sup_{z \in \partial D(z_0 r)} |f(z)|, \quad \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

3. En déduire le théorème de Liouville : toute fonction entière bornée est constante.

Exercice 2. Théorème de Weierstrass

Soit (f_n) une suite de $\mathcal{H}(\Omega)$ qui converge vers f uniformément sur tout compact de Ω. On veut montrer que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ et que (f'_n) converge uniformément sur tout compact de Ω vers f'.

1. Montrer que la suite (f'_n) est uniformément de Cauchy sur tout compact de Ω, et donc que (f'_n) converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction g.
2. Montrer que f est holomorphe et que $f' = g$.

Exercice 3. Lemme de Schwarz

Soit $D = D(0,1)$ et $f : D \to \mathbf{C}$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leqslant 1$ pour tout $z \in \mathbf{C}$.

1. Montrer qu'il existe une fonction holomorphe $g : D \to \mathbf{C}$ telle que $f(z) = zg(z)$ pour tout $z \in D$.
2. En appliquant le principe du maximum à g, montrer que $|g(z)| \leqslant |z|$ pour tout $z \in D$.
3. On suppose de plus que'il existe $a \in D \setminus \{0\}$ tel que $|f(a)| = |a|$. Montrer qu'il existe un nombre complexe λ de module 1 tel que $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in D$.

Exercice 4. Transformations de Möbius

Soit $D = D(0,1)$. On note G le groupe des automorphismes holomorphes de D, c'est-à-dire des fonctions bijectives $f : D \to D$ telles que f et f^{-1} sont holomorphes.

1. Soit $a \in D$. Pour $z \in D$, on pose $\phi_a(z) = \frac{z-a}{1-\bar{a}z}$. Montrer que la fonction ϕ_a ainsi définie est dans G.
2. Montrer à l'aide de l'exercice précédent que tout élément de G est de la forme $\lambda\phi_a$, pour λ un nombre complexe de module 1 et $a \in D$.
3. Soit $P = \{z \in \mathbf{C} : \Im(z) > 0\}$. Montrer que l'application $z \mapsto i\frac{1+z}{1-z}$ est une bijection holomorphe et de réciproque holomorphe de D dans P. En déduire une description du groupe des automorphismes holomorphes de P.