Feuille 7
Analyse complexe (II).

Révisions de cours pour la séance prochaine :

1. Calcul différentiel pour des fonctions de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^k$.
2. Théorème des fonctions implicites.

Dans toute la feuille, on désigne par Ω un ouvert de $\mathbf{C}$, et par $\mathcal{H}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Exercice 1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur Ω pour que l'anneau $\mathcal{H}(\Omega)$ soit intègre.

Exercice 2. Le lemme des trois droites
On note $\Omega = \{z \in \mathbf{C} : 0 < \Re z < 1\}$. Soit f une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ telle que $f_{|\Omega} \in \mathcal{H}(\Omega)$. On suppose que f est bornée et on se donne des réels strictement positifs M_0 et M_1 tels que pour tout $y \in \mathbf{R}$, on ait $|f(iy)| \leqslant M_0$ et $|f(1+iy)| \leqslant M_1$. Le but de l'exercice est de montrer que si $z \in \Omega$, on a

$$|f(z)| \leqslant M_0^{1-\Re z} M_1^{\Re z}.$$

1. En considérant $z \mapsto f(z)M_0^{z-1}M_1^{-z}$, montrer que l'on peut supposer sans perte de généralité que $M_0 = M_1 = 1$. On fait désormais cette hypothèse.
2. On suppose dans cette question que
$$\lim_{y\to\pm\infty} \sup_{x\in[0,1]} |f(x+iy)| = 0.$$
Démontrer alors le résultat à l'aide du principe du maximum.
3. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, on pose $f_n(z) = f(z)e^{z^2/n}e^{-1/n}$. Montrer que f_n relève du cas précédent et conclure.

Exercice 3. Un calcul d'intégrale par la méthode des résidus
On souhaite calculer l'intégrale suivante, où $a > 1$,

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{a + \sin(t)}.$$

1. Soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbf{C}$ le lacet défini par $\gamma(t) = e^{it}$. Montrer que
$$I = \int_\gamma \frac{2}{z^2 + 2iaz - 1}\,\mathrm{d}z.$$
2. Montrer que l'équation $z^2 + 2iaz - 1 = 0$ admet deux solutions complexes, dont une seule est de module inférieur à 1.
3. À l'aide du théorème des résidus, montrer que
$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}.$$

Exercice 4. Un autre calcul d'intégrale par la méthode des résidus

1. Soit Ω un ouvert de $\mathbf{C}$, $a \in \Omega$, et u, v deux fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que v s'annule uniquement en a, et que $v'(a) \neq 0$. Soit $f = u/v$, définie sur $\Omega \setminus \{a\}$. Montrer que le résidu de f en a est égal à
$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{u(a)}{v'(a)}.$$

2. On considère la fonction $f(z) = \frac{1}{1+z^6}$. Pour $r > 0$, on note D_r le disque de centre 0 et de rayon r, et $D_r^+ = D_r \cap \{z : \Im(z) \geqslant 0\}$ le demi-disque supérieur. Soit Γ_r un paramétrage C^1 par morceaux de ∂D_r^+, dans le sens trigonométrique. Montrer que
$$\lim_{r\to\infty} \int_{\Gamma_r} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

3. À l'aide du théorème des résidus, calculer
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$