Feuille 8
Calcul différentiel

Révisions de cours pour la séance prochaine :

1. Séries entières.

Si Ω est un ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $f : \Omega \to \mathbf{R}^p$, on note Df_x la différentielle de f en x (si elle existe).

Exercice 1.

Calculer la différentielle de f dans les cas suivants

1. $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ est une fonction constante,
2. $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ est une application linéaire,
3. $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ est une forme quadratique

Exercice 2.

On note M_n l'espace vectoriel des matrices $n \times n$ à coefficients réels. On fixe $M \in \mathsf{M}_n$ et on considère l'application $f : \mathsf{M}_n \to \mathsf{M}_n$ définie par $f(A) = AMA$. Montrer que f est différentiable en tout point et calculer sa différentielle.

Exercice 3.

Soit M_n comme dans l'exercice précédent, muni de la norme d'opérateur.

1. Montrer que si $A \in \mathsf{M}_n$ vérifie $\|A\| < 1$, alors $\mathrm{Id} - A$ est inversible.
2. Montrer que GL_n (l'ensemble des matrices inversibles) est ouvert dans M_n.
3. Montrer que l'application $f : \mathsf{GL}_n \to \mathsf{GL}_n$ définie par $f(A) = A^{-1}$ est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 4. Inversion globale

Soit $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ une application de classe C^1 telle que Df_x soit inversible pour tout $x \in \mathbf{R}^n$. On suppose de plus que

1. $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$,
2. f est propre, c'est-à-dire que $\lim_{|x|\to\infty} |f(x)| = +\infty$.

On veut montrer que $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ est un C^1-difféomorphisme.

1. Soit $x \in \mathbf{R}^n$. Pourquoi existe-t-il des voisinages U de x et V de $f(x)$ tels que $f : U \to V$ est un C^1-difféomorphisme ?
2. Montrer que si $K \subset \mathbf{R}^n$ est compact, alors $f^{-1}(K)$ aussi.
3. Montrer que f est surjective.
4. Montrer que pour tout $y \in \mathbf{R}^n$, l'ensemble $f^{-1}(\{y\})$ est fini.
5. On désigne par $B(x, \varepsilon)$ la boule ouverte de centre $x \in \mathbf{R}^n$ et de rayon $\varepsilon > 0$. Pour $y \in \mathbf{R}^n$, on note $x_1, \ldots, x_p$ les antécédents de y par f. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de y tel que
$$f^{-1}(V) \subset \bigcup_{i=1}^{p} B(x_i, \varepsilon).$$
6. En déduire que l'application $y \mapsto \operatorname{card} f^{-1}(\{y\})$ est localement constante.
7. Conclure.

Exercice 5.

Soit $U \subset \mathbf{R}_{n-1}[X]$ l'ensemble des polynômes ayant n racines simples. Si $P \in U$, on note

$$\lambda_1(P) < \cdots < \lambda_n(P)$$

les racines de P. Montrer que pour $1 \leqslant i \leqslant n$, la fonction $\lambda_i : U \to \mathbf{R}$ est de classe C^∞.