

Feuille 9
Séries entières.

Révisions de cours pour la séance prochaine :

1. Séries de Fourier.

Exercice 1. Limite supérieure et limite inférieure

Pour toute suite réelle (u_n) , on définit dans $\overline{\mathbf{R}}$:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty}(u_n) := \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{u_p : p \geq n\}, \quad \liminf_{n \rightarrow \infty}(u_n) := \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{u_p : p \geq n\},$$

la borne supérieure d'un ensemble non majoré (resp. non minoré) étant $+\infty$ (resp. $-\infty$). Justifier que la définition a toujours un sens, puis montrer que

$$\inf\{u_n : n \in \mathbf{N}\} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty}(u_n) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty}(u_n) \leq \sup\{u_n : n \in \mathbf{N}\},$$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty}(u_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty}(u_n) = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lambda,$$

et que $\limsup(u_n)$ (resp. $\liminf(u_n)$), est la plus grande (resp. plus petite) valeur d'adhérence de (u_n) .

Exemple d'utilisation : lemme sous-additif

Soit (u_n) une suite positive telle que pour tous entiers n, p , on ait $u_{n+p} \leq u_n + u_p$. On va montrer que u_n/n admet une limite.

1. Montrer que pour tout $k \geq 1$ et pour tout $n \geq 0$, on a

$$u_n \leq \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor u_k + \max(u_0, \dots, u_{k-1}).$$

2. Montrer que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} \leq \inf \left\{ \frac{u_k}{k} : k \geq 1 \right\}.$$

3. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} = \inf \left\{ \frac{u_k}{k} : k \geq 1 \right\}.$$

Exercice 2. Série entière aléatoire

Soient $(X_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $[0, 1]$. On note R la variable aléatoire définie comme le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n X_1 X_2 \cdots X_n.$$

Quelle est la loi de R ?

Exercice 3. Convergence uniforme ...

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R avec $0 < R < \infty$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

1. La série converge uniformément sur le disque de convergence ouvert.
2. La série converge uniformément sur le disque de convergence fermé.
3. La série converge uniformément sur le bord du disque de convergence.

Donner un exemple où ces conditions sont vérifiées, puis un exemple où elles ne sont pas vérifiées.

Exercice 4. Points réguliers

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R avec $0 < R < \infty$. On note D le disque ouvert de convergence. Un point $a \in \partial D$ est dit régulier s'il existe une boule ouverte V_a de centre a telle que f admette un prolongement analytique à $D \cup V_a$. On souhaite montrer qu'il existe au moins un point non régulier ; on suppose donc par l'absurde que tous les points sont réguliers.

1. Soit $\Omega = D \cup \bigcup_{a \in \partial D} V_a$. Montrer que l'on peut définir un prolongement holomorphe de f à Ω .
2. Montrer que Ω contient une boule de centre 0 et de rayon $R' > R$.
3. Conclure.

Exercice 5. Séries de Dirichlet

Soient (a_n) une suite complexe et $z \in \mathbf{C}$. On considère la série de terme général $u_n(z) := a_n n^{-z}$ et l'on définit dans \mathbf{R} :

$$\sigma_c := \inf \left\{ x \in \mathbf{R} ; \sum u_n(x) \text{ est convergente} \right\},$$

$$\sigma_a := \inf \left\{ x \in \mathbf{R} ; \sum u_n(x) \text{ est absolument convergente} \right\}.$$

1. Montrer que $\sigma_c \leq \sigma_a \leq \sigma_c + 1$, et donner des exemples de suites (a_n) pour lesquelles $\sigma_c = \sigma_a$ ou $\sigma_a = \sigma_c + 1$.
2. Soit $z_0 \in \mathbf{C}$. On suppose que $\sum u_n(z_0)$ est convergente. Montrer que $\sum u_n(z)$ est convergente pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$.
3. Montrer que pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $\operatorname{Re} z > \sigma_c$, $\sum u_n(z)$ est convergente, et que pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $\operatorname{Re} z < \sigma_c$, $\sum u_n(z)$ est divergente.
4. Montrer que la fonction $u : z \mapsto u(z) := \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ définit une fonction holomorphe dans le demi-plan $\{z \in \mathbf{C} ; \operatorname{Re} z > \sigma_c\}$.

Exercice 6. Application à un problème de dénombrement

Soit $n \in \mathbf{N}$. On cherche à calculer l'entier a_n défini comme le cardinal de l'ensemble

$$\{(u, v) \in \mathbf{N}^2 : 2u + 3v = n\}.$$

1. Montrer que $\sum a_n z^n$ s'obtient en effectuant le produit de deux séries entières simples.
2. Décomposer en éléments simples $\frac{1}{1-z^2} \frac{1}{1-z^3}$ et conclure.

Une référence pour cette feuille : Queffélec–Zuily, *Éléments d'analyse*