Université Claude Bernard Mathématiques
Agrégation — préparation à l'écrit d'analyse.

Feuille 1

Limite supérieure et limite inférieure. Séries de fonctions, séries entières.

Exercice 1. Limite supérieure et limite inférieure

Pour toute suite réelle (u_n), on définit dans $\overline{\mathbf{R}} = [-\infty, \infty]$

$$\limsup_{n\to\infty}(u_n) := \lim_{n\to\infty} \sup\{u_p \,:\, p \geqslant n\}\,, \quad \liminf_{n\to\infty}(u_n) := \lim_{n\to\infty} \inf\{u_p \,:\, p \geqslant n\}\,,$$

la borne supérieure d'un ensemble non majoré (resp. non minoré) étant $+\infty$ (resp. $-\infty$).

1. Justifier que la définition a toujours un sens.
2. Montrer que
$$\limsup_{n\to\infty}(u_n) = \liminf_{n\to\infty}(u_n) = \lambda \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} u_n = \lambda,$$
3. Montrer que $\limsup(u_n)$ est la plus grande valeur d'adhérence de (u_n).
4. Quelle(s) inégalité(s) a-t-on entre $\limsup(u_n + v_n)$ et $\limsup u_n + \limsup v_n$?

Exercice 2. Exemple d'utilisation : lemme de Fekete

Soit (u_n) une suite positive telle que pour tous entiers n, p, on ait $u_{n+p} \leqslant u_n + u_p$. On va montrer que u_n/n admet une limite.

1. Montrer que pour tout $k \geqslant 1$ et pour tout $n \geqslant 0$, on a
$$u_n \leqslant \left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor u_k + \max(u_0, \dots, u_{k-1}).$$
2. Montrer que
$$\limsup_{n\to\infty} \frac{u_n}{n} \leqslant \inf\left\{\frac{u_k}{k} \,:\, k \geqslant 1\right\}.$$
3. Montrer que u_n/n admet une limite.
4. On dit qu'un ensemble $A \subset \mathbf{N}^*$ est *sans addition* s'il n'existe pas $x, y, z \in A$ vérifiant $x + y = z$. Pour $B \subset \mathbf{N}^*$, on note $f(B) = \sup\{\mathrm{card}(A) \,:\, A \subset B, A \text{ sans addition}\}$. Soit
$$u_n = \inf\{f(B) \,:\, B \subset \mathbf{N}^*, \mathrm{card}(B) = n\}.$$
Justifier que u_n/n admet une limite [1].

Exercice 3. Convergence uniforme ses séries entières

Soit $\sum a_n z_n$ une série entière de rayon de convergence R avec $0 < R < \infty$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

1. La série converge uniformément sur le disque de convergence ouvert.
2. La série converge uniformément sur le disque de convergence fermé.
3. La série converge uniformément sur le bord du disque de convergence.

Donner un exemple où ces conditions sont vérifiées, puis un exemple où elles ne sont pas vérifiées.

Exercice 4. Série entière aléatoire

Soient $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de loi uniforme sur $[0, 1]$. On note R_1 et R_2 les variables aléatoires définies comme les rayons de convergence des séries entières

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} X_1 X_2 \cdots X_n z^n.$$

Déterminer la loi de R_1 et de R_2.

1. On sait depuis 2013 que cette limite vaut 1/3.

Exercice 5. Séries de Dirichlet

Soient (a_n) une suite complexe et $z \in \mathbf{C}$. On considère la série de terme général $u_n(z) := a_n\, n^{-z}$ et l'on définit dans $\overline{\mathbf{R}}$:

$$\sigma_c := \inf\Big\{x \in \mathbf{R} \,:\, \sum u_n(x) \text{ est convergente}\Big\}\,,$$

$$\sigma_a := \inf\Big\{x \in \mathbf{R} \,:\, \sum u_n(x) \text{ est absolument convergente}\Big\}\,.$$

1. Montrer que $\sigma_c \leqslant \sigma_a \leqslant \sigma_c + 1$, et donner des exemples de suites (a_n) pour lesquelles $\sigma_c = \sigma_a$ ou $\sigma_a = \sigma_c + 1$.
2. Soit $z_0 \in \mathbf{C}$. On suppose que $\sum u_n(z_0)$ est convergente. Montrer que $\sum u_n(z)$ est convergente pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$.
   Indication. *On pourra utiliser la formule de sommation par parties ($\approx$ règle d'Abel) : si l'on pose $\Delta f_n = f_{n+1} - f_n$, alors*
   $$\sum_{n=1}^{N} f_n(\Delta g_n) = [f_{N+1}g_{N+1} - f_1 g_1] - \sum_{n=1}^{N}(\Delta f_n)g_{n+1}.$$
3. Montrer que pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $\operatorname{Re} z > \sigma_c$, $\sum u_n(z)$ est convergente, et que pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $\operatorname{Re} z < \sigma_c$, $\sum u_n(z)$ est divergente.

Exercice 6. Application à un problème de dénombrement

Soit $n \in \mathbf{N}$. On cherche à calculer l'entier a_n défini comme le cardinal de l'ensemble

$$\{(u,v) \in \mathbf{N}^2 \,:\, 2u + 3v = n\}.$$

1. Montrer que $\sum a_n z^n$ s'obtient en effectuant le produit de deux séries entières simples.
2. Décomposer en éléments simples $\frac{1}{1-z^2}\frac{1}{1-z^3}$ et en déduire la valeur de a_n.

Exercice 7. Points réguliers

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R avec $0 < R < \infty$. On note D le disque ouvert de convergence. Un point $a \in \partial D$ est dit *régulier* s'il existe une boule ouverte V_a de centre a telle que f admette un prolongement analytique à $D \cup V_a$. On souhaite montrer qu'il existe au moins un point non régulier ; on suppose donc par l'absurde que tous les points sont réguliers.

1. Soit $\Omega = D \cup \bigcup_{a \in \partial D} V_a$. Montrer que l'on peut définir un prolongement analytique de f à Ω.
2. Montrer que Ω contient une boule de centre 0 et de rayon $R' > R$.
3. Conclure.