

Feuille 10

Applications linéaires entre espaces de Banach

Dans toute la feuille X, Y, Z sont des espaces de Banach. On note B_X la boule-unité fermée de l'espace X . On note $L(X, Y)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de X dans Y . On rappelle que $L(X, Y)$ est un espace de Banach quand il est muni de la norme d'opérateur $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in B_X\}$.

On désigne par $C([0, 1])$ l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans \mathbf{R} et par $C_0(\mathbf{R})$ l'espace des fonctions continues de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , tendant vers 0 en $+\infty$ et $-\infty$. Ces deux espaces sont munis de la norme du supremum.

Exercice 1.

Donner un exemple d'un espace de Banach X et d'une application linéaire continue $T : X \rightarrow X$ qui est injective et non surjective. Même question avec « surjective et non injective ».

Exercice 2.

Montrer que l'ensemble des applications linéaires inversibles est ouvert dans $L(X, X)$.

Exercice 3.

Soit $T : C([0, 1]) \rightarrow C([0, 1])$ une application linéaire ayant la propriété suivante : $f \geq 0$ implique $(Tf) \geq 0$. Montrer que T est continue. Même question avec $T : C_0(\mathbf{R}) \rightarrow C_0(\mathbf{R})$.

On dit que $T \in L(X, Y)$ est compact si $\overline{T(B_X)}$ est compact dans Y .

Exercice 4.

Montrer qu'une application linéaire de rang fini est compacte.

Exercice 5.

Soit $S \in L(X, Y)$ et $T \in L(Y, Z)$. Montrer que si S ou T est compact, alors TS est compact.

Exercice 6.

Pour $1 \leq p \leq \infty$, on note ℓ_p l'espace des suites de puissance p -ème sommable (ou des suites bornées pour $p = +\infty$) muni de la norme usuelle

$$\|(x_n)_{n \geq 1}\|_p = \begin{cases} (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \sup_{1 \leq n \leq \infty} |x_n| & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Pour $(\lambda_n)_{n \geq 1} \in \ell_\infty$, on considère l'application linéaire $T : \ell_p \rightarrow \ell_p$ définie par $T((x_n)_{n \geq 1}) = (\lambda_n x_n)_{n \geq 1}$. Vérifier que T est continue, puis montrer l'équivalence

$$T \text{ compact} \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 0.$$

Exercice 7.

On fixe $g \in C([0, 1])$. Pour $f \in C([0, 1])$ et $x \in [0, 1]$, on pose

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(t)g(t) dt.$$

Montrer que T définit une application linéaire continue et compacte sur $C([0, 1])$.

Exercice 8.

On note $K(X, Y)$ l'ensemble des applications linéaires compactes de X dans Y . Montrer que $K(X, Y)$ est un sous-espace fermé de $L(X, Y)$.

Indication : On pourra utiliser le résultat suivant (Exercice 4 du TD 4). *Soit E un espace métrique complet. Une partie $A \subset E$ est relativement compacte si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, A peut-être recouverte par un nombre fini de boules de rayon ε .*