Université Claude Bernard Mathématiques
Agrégation — préparation à l'écrit d'analyse.

Feuille 12
Probabilités

Exercice 1. Une formule utile
Montrer que si X est une variable aléatoire positive et intégrable, on a

$$\mathbf{E}X = \int_0^\infty \mathbf{P}(X > t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2. Matrices aléatoires
Pour un entier $n > 0$, soient $(A_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ des variables aléatoires indépendantes de loi définie par $\mathbf{P}(A_{i,j} = 1) = \mathbf{P}(A_{i,j} = -1) = 1/2$. On pose $X = \det A_{i,j}$. Calculer l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

Exercice 3. Suites i.i.d. vs. mesure de Lebesgue
Si $U \in [0,1[$, on note $U = 0,X_1X_2X_3\ldots$ son (?) développement binaire, dont on rappellera la définition. On suppose que U est une variable aléatoire. Montrer l'équivalence entre les énoncés

1. La variable aléatoire U suit la loi uniforme sur $[0,1]$,
2. Les variables aléatoires $(X_n)_{n\geqslant 1}$ sont i.i.d. et on a $\mathbf{P}(X_n = 0) = \mathbf{P}(X_n = 1) = 1/2$.

Indication. *On rappelle que deux mesures de probabilité sur $\mathbf{R}$ qui coïncident sur les intervalles sont égales.*
Remarque. Cet exercice explique pourquoi on ne justifie pas l'existence de suites infinies i.i.d., bien qu'elles soient l'objet de nombreux théorèmes : leur existence équivaut à l'existence de la mesure de Lebesgue, qui est un résultat difficile.

Exercice 4. Escalier du diable
Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. vérifiant $\mathbf{P}(X_1 = 0) = \mathbf{P}(X_1 = 2) = 1/2$. On pose

$$Z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{X_n}{3^n}.$$

Montrer que la fonction de répartition de Z est une fonction continue qui est presque partout dérivable et de dérivée nulle.

Exercice 5. Inégalité de Hoeffding

1. Montrer que si $p \in [0,1]$, la fonction $f : x \mapsto -xp + \ln(1-p+pe^x)$ vérifie $f'' \leqslant 1/4$ et $f(x) \leqslant x^2/8$.
2. Soient a, b deux réels, et soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[a,b]$ et telle que $\mathbf{E}X = 0$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$,
$$\mathbf{E}\exp(\lambda X) \leqslant \exp\left(\lambda^2 \frac{(b-a)^2}{8}\right).$$
Indication. *Se ramener au cas où $b - a = 1$ et utiliser la question précédente.*
3. Soit (X_n) une suite de variables i.i.d. de même loi que X. Montrer que pout tout $\varepsilon > 0$,
$$\mathbf{P}(X_1 + \cdots + X_n \geqslant \varepsilon n) \leqslant \exp\left(-n\frac{4\varepsilon^2}{(b-a)^2}\right).$$

Exercice 6. Pseudo-inverse et simulation
Soit X une variable aléatoire. On note F sa fonction de répartition, définie pour $x \in \mathbf{R}$ par $F(x) = \mathbf{P}(X \leqslant x)$. On introduit une fonction $G :]0,1[\to \mathbf{R}$ par

$$G(t) = \inf\{x : F(x) \geqslant t\}.$$

1. Montrer que F est continue si et seulement si $F(G(t)) = t$ pour tout $t \in]0,1[$.
2. Montrer que F est strictement croissante si et seulement si $G(F(x)) = x$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
3. Si F est continue et strictement croissante, montrer que F est une bijection et que $F^{-1} = G$.
4. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0,1]$. Montrer que $G(U)$ a même loi que X.