Université Claude Bernard — Mathématiques

Agrégation — préparation à l'écrit d'analyse.

Feuille 13

Probabilités : autour des lois usuelles

Les lois classiques : on dit qu'une variable aléatoire X suit ...

... une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$ si $\mathbf{P}(X=1)=p$, $\mathbf{P}(X=0)=1-p$.

... une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbf{N}$, $p \in [0,1]$ si $\mathbf{P}(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

... une loi de Poisson de paramètre $\theta \in \mathbf{R}^+$ si $\mathbf{P}(X=k)=e^{-\theta}\theta^k/k!$ pour $k \in \mathbf{N}$.

... une loi Gaussienne d'espérance $m \in \mathbf{R}$ et de variance σ^2 ($\sigma \in \mathbf{R}^+$), notée $N(m,\sigma^2)$, si elle a même loi que $m+\sigma Y$, où Y a pour densité

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-x^2/2\right).$$

... une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1]$ si $\mathbf{P}(X=k)=(1-p)^k p$ pour $k \in \mathbf{N}$.

... une loi exponentielle de paramètre $\lambda \in \mathbf{R}_*^+$ si elle a pour densité $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}\mathbf{1}_{x \geqslant 0}$.

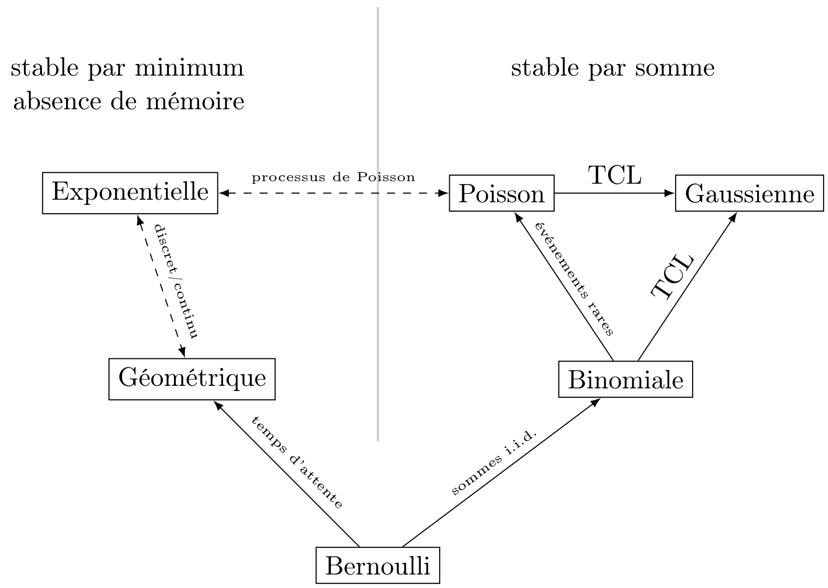

Figure 1 – Relations entre les lois classiques.

Exercice 1. Expliquez la signification des flèches non pointillées de la figure 1. On justifiera la convergence de la loi binomiale vers la loi de Poisson par un calcul de fonctions caractéristiques.

Exercice 2. Fonction caractéristique et moments

1. Soit X une v.a. telle que $\mathbf{E}|X|^k < +\infty$ pour tout $k \in \mathbf{N}$. On note $\Phi_X : t \mapsto \mathbf{E}\left[e^{itX}\right]$ sa fonction caractéristique. Montrer que Φ_X est de classe C^∞ et que $\mathbf{E}X^k = i^{-k}\Phi_X^{(k)}(0)$.
2. Utiliser la question précédente pour calculer $\mathbf{E}X^k$ lorsque
   (a) X suit une loi exponentielle de paramètre 1.
   (b) X suit une loi $N(0,1)$.

Exercice 3. Calculs de lois

Soient X, Y deux v.a. indépendantes de loi $N(0,1)$.

1. Quelle est la loi de X^2+Y^2 ?
2. Déterminer la densité de X/Y (on l'appelle loi de Cauchy).

Exercice 4. Absence de mémoire

1. Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbf{N}^*$. Montrer que X suit une loi géométrique si et seulement si elle vérifie la propriété
$$\mathbf{P}(X \geqslant m+n \,|\, X \geqslant m) = \mathbf{P}(X \geqslant n)$$
pour tous m, $n \in \mathbf{N}$.
2. Soit X une v.a. à valeurs dans $\mathbf{R}^+$. Montrer que X suit une loi exponentielle si et seulement si elle vérifie la propriété
$$\mathbf{P}(X \geqslant s+t \,|\, X \geqslant s) = \mathbf{P}(X \geqslant t)$$
pour tous s, $t \in \mathbf{R}^+$.

Exercice 5. Loi exponentielle vs. loi géométrique

1. Montrer que la partie entière d'une v.a. de loi exponentielle suit une loi géométrique.
2. Comment peut-on réaliser une v.a. de loi exponentielle comme limite de v.a. de loi géométrique ?

Exercice 6. Processus de Poisson

Soit $(T_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1. On pose $S_0 = 0$ et $S_n = T_1 + \cdots + T_n$ pour $n \in \mathbf{N}$.

1. Déterminer la densité de S_n.
2. Soit $a \in \mathbf{R}^+$. Déterminer la loi de la v.a.
$$N = \sup\{k \in \mathbf{N} \,:\, S_k \leqslant a\}.$$

Exercice 7. Domination stochastique

Soient X et Y deux v.a. On dit que Y majore stochastiquement X (on écrit $X \leqslant_{st} Y$) si, pour tout réel t, on a
$$\mathbf{P}(X \geqslant t) \leqslant \mathbf{P}(Y \geqslant t).$$

1. Montrer que $X \leqslant_{st} Y$ si et seulement si, pour toute fonction croissante bornée $h : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, on a
$$\mathbf{E}h(X) \leqslant \mathbf{E}h(Y).$$
2. Soient X et Y des v.a. indépendantes vérifiant $X \leqslant_{st} Y$. Montrer que $\mathbf{P}(X \leqslant Y) \geqslant 1/2$.
3. Soient X et Y deux v.a. de loi de Poisson, de paramètres respectifs λ et μ. Montrer l'équivalence
$$\lambda \leqslant \mu \iff X \leqslant_{st} Y.$$