Feuille 14

Probabilités : convergences, théorèmes limites

Exercice 1.

Soit X_n une v.a. de loi uniforme sur $\{1,\dots,n\}$. Quelle est la limite en loi de la suite $\left(\frac{X_n}{n}\right)$?

Exercice 2.

Soient (X_n) et X des v.a., et $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue. Montrer que $X_n \longrightarrow X$ implique $\phi(X_n) \longrightarrow \phi(X)$ pour chacune des notions de convergence : presque sûre, en probabilité, en loi.

Exercice 3.

Soit $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ continue. Calculer à l'aide de la loi des grands nombres

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right) \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n.$$

Exercice 4.

Soit (X_n) et X des v.a. ; on note $F_Y(t) = \mathbf{P}(Y \leqslant t)$ la fonction de répartition d'une v.a. Y.

1. On suppose que F_X est continue. Montrer que (X_n) converge en loi vers X si et seulement si (F_{X_n}) converge simplement vers F_X.
2. Donner un contre-exemple à l'énoncé du 1) lorsqu'on ne suppose plus F_X continue.

Exercice 5.

Calculer à l'aide du théorème central limite

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

Exercice 6.

Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes, avec X_n suivant une loi de Bernoulli de paramètre p_n. A quelle condition sur la suite (p_n) est-ce que la suite (X_n) converge en loi ? en probabilité ? presque sûrement ?

Exercice 7.

1. Montrer la formule du crible : si $A_1,\dots,A_n$ sont des événements
$$\mathbf{P}\left(A_1 \cup \cdots \cup A_n\right) = \sum_{S\subset\{1,\dots,n\},\, S\neq\emptyset} (-1)^{\mathrm{card}(S)+1} \mathbf{P}\left(\bigcap_{i\in S} A_i\right)$$
2. Soit σ_n une permutation choisie selon la loi uniforme sur le groupe symétrique $\mathfrak{S}_n$. Calculer
$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(\sigma_n \text{ admet (au moins) un point fixe}\right).$$

Exercice 8.

Soit (X_n) une suite de v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1. On pose $Y_n = \max(X_1,\dots,X_n)$.

1. Montrer que la suite $\left(\frac{Y_n}{\ln n}\right)$ converge en probabilité vers 1.
2. Montrer que la suite $(Y_n - \ln n)$ converge en loi et expliciter la limite.