Université Claude Bernard Mathématiques
Agrégation — préparation à l'écrit d'analyse.

**Feuille 15**

Probabilités 4 : autour du lemme de Borel–Cantelli

### Exercice 1. Entiers aléatoires et divisibilité

On va montrer qu'il n'existe pas de mesure de probabilité $\mu$ sur $\mathbf{N}$ ayant la propriété suivante : si $X$ est une variable aléatoire de loi $\mu$, alors pour tout entier $n$

$$\mathbf{P}(n \text{ divise } X) = \frac{1}{n}.$$

On suppose par l'absurde qu'une telle mesure existe.

1. (Question préliminaire) Soit $p_n$ le $n$ème nombre premier. Montrer à l'aide du théorème fondamental de l'arithmétique que pour tout entier $n$,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \leqslant \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \right) \prod_{l=1}^{n} \left( 1 + \frac{1}{p_l} \right).$$

   En déduire que la série $\sum p_n^{-1}$ diverge.
2. Montrer que les événements $\{$« $p_n$ divise $X$ » $: n \in \mathbf{N}\}$ sont indépendants.
3. Conclure.

### Exercice 2. Plus longue série de «pile» consécutifs

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre 1/2. On note

$$\ell_n = \max\{m \in \{1, \ldots, n\} \text{ t.q. } X_{n-m+1} = \cdots = X_n = 1\}$$

la longueur de la série de «1» en cours et

$$L_n = \max\{\ell_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$$

la longueur de la plus longue série de «1» observée avant le temps $n$. On va montrer que l'on a presque sûrement l'équivalent $L_n \sim \log_2 n$ en l'infini.

1. Montrer que pour tous $n \in \mathbf{N}, \varepsilon > 0$, on a $\mathbf{P}(\ell_n \geqslant (1+\varepsilon)\log_2 n) \leqslant 2n^{-(1+\varepsilon)}$ puis (à l'aide du lemme de Borel–Cantelli) que, presque sûrement

$$\limsup_{n\to\infty} L_n / \log_2 n \leqslant 1.$$

2. Montrer que pour $k, N \in \mathbf{N}$, on a

$$\mathbf{P}(L_{kN} < k) \leqslant \left(1 - 2^{-k}\right)^N \leqslant \exp(-N/2^k).$$

3. Appliquer la question précédente avec $k = \lfloor (1-\varepsilon)\log_2 n \rfloor$ et $N = \lfloor n/k \rfloor$ pour conclure que, presque sûrement.

$$\liminf_{n\to\infty} L_n / \log_2 n \geqslant 1.$$

**Exercice 3. Nombres normaux**

1. Montrer que presque tout nombre réel est transcendant, c'est-à-dire qu'il n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers.
2. Soit $r \geqslant 2$ un entier. On rappelle qu'un nombre $x \in [0,1[$ admet un unique développement en base $r$, donné par une suite $(e_n(x))_{n\geqslant 1}$ à valeurs dans $\{0,\ldots,r-1\}$ vérifiant

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e_n(x)}{r^n} \quad \text{et} \quad \liminf_{n\to\infty} e_n(x) < r-1.$$

On pourra utilisee le fait que si $x$ est une v.a. de loi uniforme sur $[0,1[$, alors les v.a. $(e_n(x))_{n\geqslant 1}$ sont i.i.d. de loi uniforme sur $\{0,\ldots,r-1\}$.

On dit que $x$ est *normal en base* $r$ si tous les mots de longueur donnée apparaissent avec la même fréquence dans le développpement en base $r$ de $x$, autrement dit si pour toute suite finie $(z_0,\ldots,z_{k-1}) \in \{0,\cdots,r-1\}^k$, on a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\mathrm{card}\{m \in \{1,\ldots,n\} \,:\, x_m = z_0, x_{m+1} = z_1, \ldots, x_{m+k-1} = z_{k-1}\} = \frac{1}{r^k}.$$

Montrer qu'il existe un nombre qui est normal en base $r$ pour tout $r$.

**Exercice 4. Exercice bonus**

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes telles que $X+Y \in L^1$. Montrer que $X$ et $Y$ sont dans $L^1$.