Feuille 22
Compacité

Exercice 1. Théorème de Dini (1)
Soit (K,d) un espace métrique compact, et (f_n) une suite croissante d'éléments de $C(K)$. On suppose que (f_n) converge simplement vers une fonction continue f. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 2. Théorème de Dini (2)
Soit (f_n) une suite de fonctions de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ qui converge simplement vers une fonction continue f. On suppose que pour chaque n, f_n est croissante. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 3. Théorème de Carathéodory

1. Soient $x_1,\dots,x_p$ dans $\mathbf{R}^n$ avec $p > n+1$. Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1,\dots,\lambda_p$ non tous nuls vérifiant à la fois $\sum_{i=1}^p \lambda_i = 0$ et $\sum_{i=1}^p \lambda_i x_i = 0$ (on dit que les points $x_1,\dots,x_p$ sont affinement liés).
2. Soit $A \subset \mathbf{R}^n$ et $\mathrm{conv}(A)$ l'enveloppe convexe de A. Montrer que tout élément de $\mathrm{conv}(A)$ s'écrit comme combinaison convexe d'au plus $n+1$ éléments de A.
3. Soit $A \subset \mathbf{R}^n$ compact. Montrer que $\mathrm{conv}(A)$ est compact.

Exercice 4. Espaces de fonctions hölderiennes
Soit $\alpha > 0$. Pour une fonction $f : [0,1] \to \mathbf{R}$, on pose

$$\|f\|_\alpha = \sup_{0\leqslant x\neq y\leqslant 1} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

On dit que f est α-hölderienne si $\|f\|_\alpha < \infty$.

1. Montrer que si $\alpha > 1$, toute fonction α-hölderienne de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$ est constante. Dans la suite on supposera $0 < \alpha < 1$.
2. On note $C^\alpha([0,1])$ l'espace des fonctions α-hölderiennes de $[0,1]$ dans $\mathbf{R}$. Montrer que $C^\alpha([0,1])$ est un espace de Banach quand il est muni de la norme $\|\cdot\|_\alpha + \|\cdot\|_\infty$.
3. Montrer que la boule-unité de $C^\alpha([0,1])$ est relativement compacte dans $C([0,1])$.
4. Soit $0 < \alpha < \beta < 1$.
   (a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on a l'inégalité

   $$\|f\|_\alpha \leqslant \max(\|f\|_\beta \varepsilon^{\beta-\alpha}, 2\|f\|_\infty \varepsilon^{-\alpha}).$$

   (b) En déduire que la boule-unité de $C^\beta([0,1])$ est relativement compacte dans $C^\alpha([0,1])$.

Exercice 5. Dimension métrique
Soit (K,d) un espace métrique. Pour $\varepsilon > 0$, on note $N(K,\varepsilon)$ le nombre minimal de boules ouvertes de rayon ε qu'il faut pour recouvrir K. On appelle *dimension métrique de* K la quantité

$$\dim_m(K) := \limsup_{\varepsilon\to 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)}.$$

1. Quelle est la dimension métrique d'un intervalle de $\mathbf{R}$?
2. Soit K la boule-unité d'un espace vectoriel normé de dimension n, et $0 < \varepsilon < 1$. Montrer que $N(K,\varepsilon) \geqslant (1/\varepsilon)^n$, puis que $N(K,\varepsilon) \leqslant (1+2/\varepsilon)^n$ (**Indication :** montrer que pour un recouvrement minimal par des boules de rayon ε, les boules de même centre et de rayon $\varepsilon/2$ sont disjointes). En déduire la dimension métrique de K.

3. Soit p un nombre premier. On définit pour $x, y \in \mathbf{Z}$

$$\begin{cases} d_p(x,y) = 0 & \text{si } x = y \\ d_p(x,y) = \exp(-n) \text{ où } n \text{ est le plus grand entier tel que } p^n \text{ divise } x-y & \text{si } x \neq y. \end{cases}$$

Montrer que d_p est une distance sur $\mathbf{Z}$ est que la dimension métrique de $(\mathbf{Z}, d_p)$ vaut $\log p$. Le complété de $(\mathbf{Z}, d_p)$ s'appelle l'ensemble des nombres p-adiques.

Exercice 6. Distance de Hausdorff

Soit (X, d) un espace métrique complet. Pour $A \subset X$ et $\varepsilon > 0$, on note

$$A_\varepsilon = \bigcup_{x \in A} B(x, \varepsilon).$$

On note $K(X)$ l'ensembles des compacts non vides de X.

1. Montrer que l'on définit une distance D sur $K(X)$ en posant

$$D(A,B) = \inf\{\varepsilon > 0 \,:\, A \subset B_\varepsilon \text{ et } B \subset A_\varepsilon\}.$$

2. Montrer que $(K(X), D)$ est complet.
3. Montrer que X est compact si et seulement si $K(X)$ est compact.