

Feuille 23
Théorèmes de point fixe

Exercice 1. Théorèmes basés sur l'ordre dans \mathbf{R}

Soit $I = [a, b]$ un segment de \mathbf{R} .

1. Soit $f : I \rightarrow I$ continue. Montrer que f admet un point fixe.
2. Soit $f : I \rightarrow \mathbf{R}$ continue telle que $I \subset f(I)$. Montrer que f admet un point fixe.
3. Soit $f : I \rightarrow I$ croissante. Montrer que f admet un point fixe.

Exercice 2. Théorème du point fixe de Banach (dans un espace complet)

Soit (E, d) un espace métrique complet non vide. Soit $\lambda \in [0, 1[$ et $f : E \rightarrow E$ une application vérifiant $d(f(x), f(y)) \leq \lambda d(x, y)$ pour tous $x, y \in E$. Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 3. Dans un espace compact

Soit (E, d) un espace métrique compact non vide et $f : E \rightarrow E$ telle que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tous $x, y \in E$ avec $x \neq y$. Montrer que f admet un unique point fixe.

En considérant $E = [1, \infty[$ et $f : x \mapsto x + 1/x$, montrer que la conclusion n'est plus satisfaite si on suppose seulement (E, d) complet.

Exercice 4. Dans un convexe compact

Soit K un convexe compact non vide d'un espace vectoriel normé, et $f : K \rightarrow K$ une fonction vérifiant $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$ pour tous $x, y \in K$. Montrer que f admet un point fixe. Est-il unique ?

Indication. Pour $a \in K$ et $\varepsilon \in]0, 1[$, considérer $x \mapsto \varepsilon a + (1 - \varepsilon)f(x)$.

Remarque. Le théorème de Brouwer affirme que toute fonction continue $f : K \rightarrow K$ admet un point fixe ; ce résultat est considérablement plus difficile à démontrer.

Exercice 5. Perturbation de l'identité

Soit $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ une fonction k -Lipschitzienne avec $k < 1$. On va montrer que $g = \text{Id} - f$ est bijective d'inverse continue.

1. Montrer que g est injective.
2. En utilisant un théorème de point fixe, montrer que g est surjective.
3. Montrer que g^{-1} est continue.

Exercice 6. Théorème de Kakutani

Soit E un espace vectoriel normé et $K \subset E$ un compact convexe non vide.

1. Soit $f : E \rightarrow E$ une application affine continue telle que $f(K) \subset K$. Soit $a \in K$. On pose $a_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f^k(a)$.
 - (a) Montrer que $a_n \in K$ et que $\|f(a_n) - a_n\|$ tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini.
 - (b) En déduire que f admet au moins un point fixe dans K .
 - (c) Montrer que l'ensemble des points fixes de f dans K est un compact convexe non vide.
2. Supposons maintenant que K est stable par une famille $(f_i)_{i \in I}$ d'applications affines continues qui commutent deux à deux.
 - (a) Supposons I fini. Montrer qu'il existe un point de K qui est fixe pour tous les f_i .
 - (b) Montrer que la propriété reste vraie pour I infini.