Université Claude Bernard Mathématiques
Agrégation — préparation à l'écrit d'analyse.

Feuille 24
Compléments de probabilités ; espaces vectoriels normés.

Exercice 1. Maximum de n gaussiennes

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $N(0,1)$. On note

$$u_n = \mathbf{E}\max(X_1,\dots,X_n).$$

1. Calculer u_1 et u_2.
   Indication. *On pourra montrer que* (X_1,X_2) *a même loi que* $\frac{1}{\sqrt{2}}(X_1+X_2,X_1-X_2)$.
2. Montrer que (u_n) croît vers $+\infty$.
3. Expliquer les détails du calcul suivant et en déduire que $u_n \leqslant \sqrt{2\log n}$. Pour $\beta > 0$, on a

$$u_n \leqslant \mathbf{E}\frac{1}{\beta}\log\sum_{k=1}^{n}\exp(\beta X_k) \leqslant \frac{1}{\beta}\log\mathbf{E}\sum_{k=1}^{n}\exp(\beta X_k) = \frac{1}{\beta}\log(N\exp(\beta^2/2)).$$

Remarque. *On peut montrer que* $u_n \sim \sqrt{2\log n}$.

Exercice 2. Théorème de Riesz

Soit X un espace vectoriel normé de dimension infine, et B_X sa boule-unité.

1. Soit $F \subset X$ un sous-espace de dimension finie. Montrer qu'il existe $x \in X$ vérifiant $\|x\| = 1$ et $\|x-y\| \geqslant 1$ pour tout $y \in F$.
2. En déduire que B_X n'est pas compact.

Exercice 3. Enveloppe convexe d'un compact

Soit X un espace de Banach et $K \subset X$ un compact. Montrer que $\overline{\mathrm{conv}(K)}$ est compact.
Indication. *Compact* $\iff$ *complet et précompact.*

Exercice 4. Théorème de Mazur–Ulam

On va démontrer le théorème de Mazur–Ulam : toute isométrie bijective entre espaces vectoriels normés réels est affine.

Soient E et F deux espaces vectoriels normés réels, et $f : E \to F$. On dit que f est une isométrie si on a $\|f(x)-f(y)\| = \|x-y\|$ pour tous $x,y \in E$.

1. Montrer que si une fonction continue $f : E \to F$ vérifie

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

   pour tous a, $b \in E$, alors f est affine.
2. Pour $z \in E$, on définit $R_z : E \to E$ par $R_z(x) = 2z - x$. Vérifier que R_z est une isométrie bijective, ayant z comme unique point fixe, et vérifiant $\|R_z(x)-x\| = 2\|x-z\|$ pour tout $x \in E$.
3. Soient $a,b \in E$. On note $\mathcal{W}$ l'ensemble des isométries bijectives de E dans E fixant a et b. On pose $z = \frac{a+b}{2}$ et on note

$$\lambda := \sup_{f\in\mathcal{W}} \|f(z)-z\|.$$

   En considérant $R_z \circ f^{-1} \circ R_z \circ f$, montrer que $2\lambda \leqslant \lambda$, puis que $\lambda = 0$.
4. Soit $f : E \to F$ une isométrie bijective. Montrer que f est affine à l'aide des questions précédentes (pour a, $b \in E$ et $z = \frac{a+b}{2}$, considérer $R_z \circ f^{-1} \circ R_{\frac{f(a)+f(b)}{2}} \circ f$).
5. Donner un exemple d'isométrie non affine de $\mathbf{R}$ dans $(\mathbf{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.
6. Que peut-on dire d'une isométrie bijective entre $\mathbf{C}$-espaces vectoriels ?