

Feuille 5
Topologie.

Seule la topologie des espaces métriques est au programme de l'agrégation.

Exercice 1. Vrai ou faux

Soient X et Y des espaces métriques. Déterminer si les énoncés suivants sont vrais ou faux.

1. Les boules ouvertes sont ouvertes, les boules fermées sont fermées.
2. L'adhérence d'une boule ouverte est la boule fermée de mêmes centre et rayon.
3. L'intérieur d'une boule fermée est la boule ouverte de mêmes centre et rayon.
4. On suppose X séparable. Alors tout sous-ensemble de X est séparable.
5. X est connexe si et seulement si toutes les boules de X sont connexes.

Exercice 2. Continuité automatique

Soient X et Y deux espaces métriques, et $f : X \rightarrow Y$ une bijection continue. On suppose X compact. Montrer que f^{-1} est continue.

Exercice 3. Orbite d'une fonction continue sous les translations

On considère l'espace $X = C_b(\mathbf{R})$ des fonctions continues bornées de \mathbf{R} dans \mathbf{R} , muni de la norme du supremum. Soit $f \in X$. Pour $t \in \mathbf{R}$, on note f_t la fonction $x \mapsto f(x-t)$. On note enfin $O_f = \{f_t : t \in \mathbf{R}\}$.

1. Montrer que X n'est pas séparable.
2. On suppose f uniformément continue. Montrer que O_f est séparable.
3. On suppose O_f séparable. Soit (f_{t_n}) une suite dense dans O_f .
 - (a) Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose $F_n = \{t \in \mathbf{R} : \|f_t - f_{t_n}\| \leq \varepsilon\}$. Montrer que F_n est fermé dans \mathbf{R} .
 - (b) En déduire que f est uniformément continue.

Indication. On pourra utiliser le théorème de Baire : dans un espace complet, une union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.

Exercice 4. Compact \iff complet et précompact

Soit X un espace métrique. Montrer que X est compact si et seulement si X est complet et si pour tout $\varepsilon > 0$, X peut-être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε .

Exercice 5. Topologie des groupes de matrices

1. Montrer que $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbf{R})$.
2. Montrer que le groupe $\mathrm{SO}(n)$ est connexe par arcs.

Indication. On pourra commencer par expliciter un arc reliant deux réflexions.
3. Quelles sont les composantes connexes de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$?
4. Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme non constant. Montrer que $\{\lambda \in \mathbf{C} : P(\lambda) \neq 0\}$ est connexe par arcs.
5. Quelles sont les composantes connexes de $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$?

Exercice 6. Théorème de Tychonoff dénombrable

Soit (E_n, d_n) une suite d'espaces métriques et $E = \prod E_n$ le produit cartésien infini. On définit pour $x, y \in E$

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{+\infty} \min(d_n(x_n, y_n), 2^{-n}).$$

1. Montrer que d est une distance.
2. Montrer que (E, d) est compact si et seulement si (E_n, d_n) est compact pour tout n .

Exercice 7. Classes d'homéomorphisme de l'alphabet

On considère les lettres de l'alphabet comme des (réunions de) courbes dans \mathbf{R}^2 , comme suit.

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Classifier ces 26 espaces métriques à homéomorphisme près.

Exercice 8. Grassmanniennes

Soit $n \geq 1$. On note X l'ensemble des sous-espaces vectoriels de \mathbf{R}^n . Si $E \in X$, on note P_E la projection orthogonale sur E .

1. Montrer que l'on définit une distance sur X par la formule

$$d(E, F) = \sup\{\|P_E(x) - P_F(x)\| : \|x\| \leq 1\}.$$

2. Quelles sont les composantes connexes de (X, d) ?
3. Montrer que (X, d) est complet.

Référence : H. Queffelec, Topologie