

Feuille 6
Espaces de Hilbert.

Dans toute la feuille d'exercices, H désigne un espace de Hilbert réel et sa norme est notée $\| \cdot \|$.

Exercice 1. Identité du parallélogramme

Montrer l'égalité suivante, dite *identité du parallélogramme* (pourquoi?), valable pour $x, y \in H$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \quad (1)$$

Exercice 2. Opérateur adjoint

Soit $T : H \rightarrow H$ une application linéaire continue. On rappelle que la norme d'opérateur de T est définie comme $\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in H, \|x\| \leq 1\}$.

1. Montrer qu'il existe une unique application linéaire $T^* : H \rightarrow H$ telle que, pour tous $x, y \in H$, on a

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$$

2. Montrer que $\|T^*\| = \|T\|$ et que $(T^*)^* = T$.

3. (*) On suppose que $T = T^*$. Montrer que $\|T\| = \sup\{|\langle Tx, x \rangle| : x \in H, \|x\| \leq 1\}$.

Exercice 3. Théorème de projection sur un convexe fermé

Soit $C \subset H$ un convexe fermé non vide.

1. Montrer que pour tout $x \in H$ il existe un unique élément $y \in C$ (noté $P_C(x)$ par la suite) tel que

$$\|x - y\| = \inf\{\|x - z\| : z \in C\}.$$

Indication : considérer une suite (y_n) dans C approchant l'infimum et montrer qu'elle converge en appliquant (1) à $(x - y_p, x - y_q)$.

2. Soit $x \in H$. Montrer que $P_C x$ est caractérisé comme étant l'unique point $y \in C$ vérifiant

$$\langle z - y, x - y \rangle \leq 0$$

pour tout $z \in C$.

3. Montrer que l'application $P_C : H \rightarrow H$ ainsi définie est continue. Montrer qu'elle est linéaire si et seulement si C est un sous-espace vectoriel de H .

4. Application. Soit $a < b$ deux réels. Dans l'espace de Hilbert $H = L^2([0, 1])$, on considère le sous-ensemble

$$C = \{f \in L^2([0, 1]) : a \leq f \leq b \text{ presque partout}\}.$$

Vérifier que C est convexe et fermé, et déterminer $P_C g$ pour $g \in H$.

Exercice 4. Ondelettes

Soit $\psi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1/2, \\ -1 & \text{si } 1/2 < t \leq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour $x \in \mathbf{R}$ et $k, n \in \mathbf{Z}$, on pose $\psi_{n,k}(x) = 2^{n/2} \psi(2^n x - k)$. Montrer que la famille

$$\{\psi_{n,k} : k \in \mathbf{Z}, n \in \mathbf{Z}\}$$

est une base orthonormale de l'espace de Hilbert $L^2(\mathbf{R})$.

Indication. On utilisera librement le résultat suivant : si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est une fonction localement intégrable, alors la fonction $F := x \mapsto \int_0^x f(t) dt$ est dérivable et $F' = f$ presque partout.

Exercice 5. Théorème ergodique de von Neumann

Soit $T : H \rightarrow H$ une application linéaire vérifiant $\|T\| \leq 1$. Pour $n \in \mathbf{N}$, on note $S_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n T^k$. On veut montrer que pour tout $x \in H$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n x = Px$$

où P désigne le projecteur orthogonal sur le sous-espace $\ker(\text{Id} - T)$.

1. Montrer que $\ker(\text{Id} - T) = \ker(\text{Id} - T^*)$, et en déduire que $H = \ker(\text{Id} - T) \oplus \overline{\text{Im}(\text{Id} - T)}$.
2. Montrer que $S_n(x)$ tend vers 0 pour $x \in \overline{\text{Im}(\text{Id} - T)}$.
3. Conclure.
4. Est-il vrai que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|S_n - P\| = 0$?

(*) **Application.** Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction mesurable bornée 2π -périodique et $\alpha \in \mathbf{R} \setminus 2\pi\mathbf{Q}$. Déterminer la limite dans $L^2([0, 2\pi])$ de la suite de fonctions (f_n) définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f(x + n\alpha).$$

Exercice 6. Réciproque de l'identité du parallélogramme

Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach tel que l'identité (1) est satisfaite pour tous x, y dans X . Montrer que X est un espace de Hilbert.

Indication. Considérer la fonction $B : (x, y) \mapsto \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$ et montrer que $B(x, y) = B(y, x)$, $B(x, -y) = -B(x, y)$ et $B(x+y, z) = B(x, z) + B(y, z)$ — pour ce dernier point appliquer (1) à (x, y) , $(x+z, y+z)$ et $(x+y+z, z)$.

Exercice 7. Autour du théorème de Lax–Milgram

Soit $a : H \times H \rightarrow \mathbf{R}$ une forme bilinéaire symétrique, continue et coercive (c'est-à-dire telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $a(x, x) \geq \alpha \|x\|^2$ pour tout $x \in H$). On se donne également une forme linéaire continue $\ell : H \rightarrow \mathbf{R}$.

1. Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tous $x, y \in H$, on ait

$$|a(x, y)| \leq M \|x\| \|y\|.$$

2. Montrer le théorème de Lax–Milgram : il existe un unique $u \in H$ tel que l'on ait $a(u, v) = \ell(v)$ pour tout $v \in H$.
3. Soit $V \subset H$ un sous-espace vectoriel fermé et soit u la solution de $a(u, v) = \ell(v)$ pour tout $v \in H$.
 - (a) Montrer qu'il existe un unique $u_0 \in V$ vérifiant $a(u_0, v) = \ell(v)$ pour tout $v \in V$. Montrer que $\|u_0\| \leq \|\ell\|/\alpha$.
 - (b) Montrer l'inégalité

$$\|u - u_0\| \leq \frac{M}{\alpha} \inf\{\|u - v\| : v \in V\}.$$