Université Claude Bernard Mathématiques
Agrégation — préparation à l'écrit d'analyse.

Feuille 8
Espaces L^p.

Exercice 1. Continuité de la norme comme fonction de p
Soit f une fonction intégrable et bornée sur $\mathbf{R}$. Montrer que l'application $p \mapsto \|f\|_p$ est continue sur $[1, \infty)$, et que $\lim\limits_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty$.

Exercice 2. La convergence dans L^p entraîne la convergence presque partout d'une sous-suite
Soit $p \in [1, \infty]$, et (f_n) une suite de fonctions de $L^p(\mathbf{R})$ tendant vers f dans L^p, c'est-à-dire telle que $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$. Montrer qu'il existe une sous-suite (f_{n_k}) qui converge presque partout vers f.
Indication : *Choisir (n_k) telle que la série $\sum_k \|f_{n_k} - f\|_p^p$ converge.*

Exercice 3. Inclusions
Soit $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré.
1. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
   (a) $\mu(X) < \infty$.
   (b) Pour tous $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, on a $L^p(X, \mathcal{F}, \mu) \supset L^q(X, \mathcal{F}, \mu)$.
2. (*) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes
   (a) Il existe $\varepsilon > 0$, tel que tout $A \in \mathcal{F}$ vérifiant $\mu(A) > 0$ vérifie en fait $\mu(A) \geqslant \varepsilon$.
   (b) Pour tous $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$, on a $L^p(X, \mathcal{F}, \mu) \subset L^q(X, \mathcal{F}, \mu)$.

Indication : *pour montrer que (2b) implique (2a), on pourra utiliser le théorème du graphe fermé, dont on rappelle l'énoncé : une application linéaire entre espaces de Banach dont le graphe est fermé est continue.*

Exercice 4. Approximations de l'unité
On note $|\cdot|$ la norme euclidienne usuelle sur $\mathbf{R}^d$. On considère une *suite régularisante*, c'est-à-dire une suite de fonctions (ρ_n) de classe C^∞ de $\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}^+$ telle que
(i) $\rho_n(x) = 0$ si $|x| > 1/n$.
(ii) $\int \rho_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$.
1. Soit $\psi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par
$$\psi(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right) & \text{si } |x| < 1, \\ 0 & \text{si } |x| \geqslant 1. \end{cases}$$
   Montrer que ψ est de classe C^∞. Construire une suite régularisante à l'aide de ψ.
2. Soit $f : \mathbf{R}^d \to \mathbf{R}$ continue. Montrer que $(\rho_n * f)$ converge vers f uniformément sur tout compact.
3. Soit $f \in L^p$ pour $1 \leqslant p < \infty$. Montrer que $(\rho_n * f)$ converge vers f dans L^p (on utilisera le fait que les fonctions continues à support compact sont denses dans L^p ; c'est un résultat de théorie de la mesure).
4. Soit f une fonction intégrable et g une fonction de classe C^1 à support compact. Montrer que $f * g$ est de classe C^1 et que, pour tout $1 \leqslant i \leqslant d$, on a
$$\frac{\partial(f * g)}{\partial x_i} = f * \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$
5. Montrer que les fonctions C^∞ à support compact forment une partie dense de L^p si $1 \leqslant p < \infty$. Cela reste-t-il vrai pour L^∞ ?

Exercice 5. Fonctions de référence
On note $|\cdot|$ la norme euclidienne sur $\mathbf{R}^d$. A quelles conditions sur $\alpha, \beta \in \mathbf{R}^+$ et $p \in [1, \infty]$ est-ce que la fonction f définie sur $\mathbf{R}^d$ par
$$f(x) = \frac{1}{(1 + |x|^\alpha)(1 + |\ln |x||)^\beta}$$
est dans $L^p(\mathbf{R}^d)$?