ENS Lyon
M1 Analyse avancée

Mathématiques

Examen du 5 janvier 2012
Durée : 3 heures.

La consultation des notes de cours est autorisée.

Traiter cette partie sur la feuille de copie N. 1

Exercice 1

On rappelle le résultat suivant, qu'on pourra utiliser sans le démontrer : *Si I est un intervalle ouvert de $\mathbf{R}$ et $\Lambda \in \mathcal{D}'(I)$ vérifie $\Lambda' = 0$ alors Λ est une distribution constante dans I.*

On considère l'équation dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$:

$$2xT' - T = \delta, \tag{$*$}$$

où δ désigne la distribution associée à la mesure de Dirac en 0.

1. Déterminer toutes les solutions de $(*)$ à support contenu dans $\{0\}$.
2. Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ est une solution de $(*)$, déterminer les restrictions de T à $\mathcal{D}(]0, \infty[)$ et $\mathcal{D}(]-\infty, 0[)$.
3. Montrer que les distributions $\sqrt{|x|}H(x)$ et $\sqrt{|x|}H(-x)$ vérifient l'équation
$$2xT' - T = 0.$$
(On a noté par H la fonction d'Heaviside, c'est-à-dire la fonction caractéristique de $\mathbf{R}^+$).
4. En déduire la forme générale des solutions de $(*)$.

Exercice 2

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(a_n) \subset \mathbf{R}$ pour que la série $\sum \delta_{a_n}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, où δ_{a_n} désigne la masse de Dirac centrée au point a_n.
2. Démontrer que si $h \in C^1([-\pi, \pi])$, alors $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) \sin(n + \frac{1}{2})x \, \mathrm{d}x = 0$.
3. On rappelle la formule
$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{x}{2}},$$
valable pour $x \in \mathbf{R}\backslash 2\pi\mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$. Justifier l'égalité dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$,
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = c \sum_{k\in\mathbf{Z}} \delta_{2k\pi},$$
où $c \in \mathbf{R}$ est une constante que l'on déterminera.

Traiter cette partie sur la feuille de copie N. 2

Exercice 3

Soit l'espace de Hilbert $H = \ell^2(\mathbf{Z})$ des suites complexes (indexées par les entiers relatifs) de carré sommable. Soit $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ la base hilbertienne canonique de H (i.e. la suite (e_n) a tous ses termes nuls, sauf le $n$ème qui vaut 1). Soit S l'opérateur de décalage sur H défini par $S(e_n) = e_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

1. Quel est l'adjoint (hilbertien) de S ?
2. Quel est le spectre ponctuel de S ?
3. Quel est le spectre de S ?

Exercice 4

Les deux parties sont indépendantes.

1. Soit X un espace de Banach complexe séparable et réflexif, et $T \in \mathscr{L}(X)$ une application linéaire continue sur X. Si x est un vecteur propre de T, on note $\lambda(x)$ la valeur propre associée, c'est-à-dire l'unique nombre complexe vérifiant $T(x) = \lambda(x)x$. On note P l'ensemble des vecteurs propres de T de norme inférieure ou égale à 1.
   (a) Montrer que la fonction λ définie par
   $$\begin{array}{rccc} \lambda : & P & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & x & \longmapsto & \lambda(x) \end{array}$$
   est continue quand on munit P de la restriction de la topologie faible de X.
   (b) Montrer que $P \cup \{0\}$ est faiblement compact, puis que P s'écrit comme réunion dénombrable de parties faiblement compactes de X.
   (c) En déduire que le spectre ponctuel de T peut s'écrire comme réunion dénombrable de parties fermées de $\mathbf{C}$.
2. Soit K une partie de $\mathbf{C}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur K pour qu'il existe un opérateur auto-adjoint sur $\ell_2(\mathbf{N})$ dont le spectre ponctuel est égal à K.

Exercice 5

Soit X un espace de Banach, et $A \in \mathscr{L}(X)$ une application linéaire continue sur X. Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

(i) Il existe un opérateur $B \in \mathscr{L}(X)$ tel que $\mathrm{Id} - AB$ et $\mathrm{Id} - BA$ sont compacts.

(ii) $\ker(A)$ est de dimension finie et $\mathrm{im}(A)$ est un sous-espace fermé de codimension finie.

1. En supposant (i), montrer que $\ker(BA)$ est de dimension finie, $\mathrm{im}(AB)$ de codimension finie, et en déduire (ii).
2. Soit $F \subset X$ un sous-espace fermé. Montrer que F est complémenté si et seulement si il existe une application linéaire continue $P \in \mathscr{L}(X)$ vérifiant $P^2 = P$ et $\mathrm{im}\, P = F$.
3. Démontrer l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i).

Solution 1

1. Si le support de T est contenu dans $\{0\}$, alors il existe $n \in \mathbf{N}$ et $c_0, \ldots, c_n \in \mathbf{C}$ tels que $T = \sum_{j=0}^{n} c_j \delta^{(j)}$. Un calcul élémentaire montre que

$$x\delta^{(j)} = \begin{cases} 0, & \text{si } j = 0 \\ -j\delta^{(j-1)}, & \text{si } j \in \mathbf{N}^*. \end{cases}$$

Ainsi, en imposant que T est solution de $(*)$, on obtient

$$-\sum_{j=0}^{n} (2j+3) c_j \delta^{(j)} = \delta.$$

Mais les distributions δ, δ', δ'', ... sont linéairement indépendantes (pour le voir, on peut tester une combinaison linéaire des ces distributions avec des fonctions test de la forme $\varphi(\lambda\cdot)$ et faire ensuite tendre $\lambda \to +\infty$). On trouve alors $0 = c_n = \ldots = c_1$ et $c_0 = -1/3$.
En conclusion, $T = -1/3 \cdot \delta$ est la seule distribution à support contenu dans $\{0\}$ qui est solution de $(*)$.

2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ une solution de (*) et $u = T|_{]0,\infty[}$ la restriction de T à $\mathcal{D}(]0,\infty[)$. On a $u' - \frac{u}{2x} = 0$ dans $\mathcal{D}'(]0,\infty[)$. En multipliant par la fonction $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (ce qui est autorisé parce que cette fonction est C^∞ dans $]0,\infty[$) on trouve que $\left(\frac{u}{\sqrt{x}}\right)' = 0$ dans $]0,\infty[$. Grâce au rappel, on en déduit que u est de la forme $u(x) = C\sqrt{x}$, avec $C \in \mathbf{C}$. De même, si $v = T|_{]-\infty,0[}$, on a que v est de la forme $u(x) = C'\sqrt{|x|}$, avec $C' \in \mathbf{C}$.

3. Pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$, on a

$$\langle 2x\big(\sqrt{x}H(x)\big)', \varphi\rangle = -\int_0^\infty \sqrt{x}(2x\varphi)'\,dx = \int_0^\infty \sqrt{x}\varphi(x)\,dx = \langle \sqrt{x}H(x), \varphi\rangle.$$

Ainsi, la distribution $\sqrt{|x|}H(x)$ est solution dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ de l'équation $2xT' - T = 0$.
Un calcul similaire montre que $\sqrt{|x|}H(-x)$ est aussi solution dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ de l'équation $2xT' - T = 0$.

4. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ une solution de $(*)$. Alors $T - \big[C\sqrt{|x|}H(x) + C'\sqrt{|x|}H(-x)\big]$ est encore solution de $(*)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Cette distribution s'annule dans $\mathbf{R}^*$, donc elle est portée par $\{0\}$. Elle doit être alors égale à $-1/3 \cdot \delta$.
Conclusion : la solution générale de $(*)$ est

$$-\frac{1}{3}\delta + \big[C\sqrt{|x|}H(x) + C'\sqrt{|x|}H(-x)\big], \qquad C, C' \in \mathbf{C}.$$

Solution 2

1. Soit $(a_n) \subset \mathbf{R}$. La série $\sum \delta_{a_n}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ si et seulement si $|a_n| \to \infty$. En effet, si $|a_n| \to \infty$, pour toute fonction test $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ seuls un nombre fini de points (a_n) appartiennent au support de φ et la série numérique $\sum \varphi(a_n)$ est alors convergente. Réciproquement, si $|a_n| \not\to \infty$ alors la suite (a_n) contient un point limite $a \in \mathbf{R}$. En choisissant une fonction test φ telle que $\varphi(a) \neq 0$, on voit que le terme générale de la série $\sum \varphi(a_n)$ ne tend pas vers zéro. Donc $\sum \delta_{a_n}$ diverge dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.

2. On peut intégrer par parties dans $[-\pi, \pi]$. La conclusion est alors immédiate.

3. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$. Soit $M > 0$ tel que le support de ϕ est contenu dans $[-2\pi M, 2\pi M]$.

$$\begin{aligned}\langle \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}, \phi\rangle &= \int_{-(2M+1)\pi}^{(2M+1)\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\phi(x) \\ &= \sum_{k=-M}^{M} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\phi(x+2k\pi)\,dx.\end{aligned}$$

La formule de Taylor appliquée à la fonction $x \mapsto \phi(x+2k\pi)$ implique

$$\phi(x+2k\pi) = \phi(2k\pi) + x\psi(x+2k\pi), \qquad \psi \in C^1(\mathbf{R}).$$

Posons, pour $x \in [-\pi, \pi]$ et $x \neq 0$, $h(x) = \psi(x + 2k\pi)\frac{x}{\sin\frac{x}{2}}$. Cette fonction h se prolonge en une fonction de classe C^1 dans $[-\pi, \pi]$. Nous avons

$$\langle \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}, \phi\rangle = \sum_{k=-M}^{M} \left(\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}\, dx \right) \phi(2k\pi) + \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n+\tfrac{1}{2})x\, h(x)\, dx$$

Mais $\int_{-\pi}^{\pi}(\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx})\, dx = 2\pi$. Ainsi, en appliquant le résultat de la deuxième question,

$$\lim_{n\to\infty} \langle \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}, \phi\rangle = 2\pi \sum_{k=-M}^{M} \phi(2k\pi) = 2\pi \sum_{k\in\mathbf{Z}} \phi(2k\pi).$$

Ceci montre que $\sum_{-n}^{n} e^{ikx}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ vers la distribution $2\pi \sum_{k\in\mathbf{Z}} \delta_{2k\pi}$.

Solution 3

1. Il est facile de vérifier que S^* est l'opérateur défini par $S(e_n) = e_{n-1}$; autrement dit $S^* = S^{-1}$.
2. Supposons que $x = (x_n)$ est un vecteur propre de S associé à la valeur propre λ. Alors on a nécessairement $x_n = C\lambda^n$, et comme $\sum_{n\in\mathbf{Z}} |x_n|^2 < +\infty$ on a nécessairement $C = 0$. L'opérateur S n'a donc pas de vecteur propre : son spectre ponctuel est vide.
3. Comme $\|S\| = 1$, le spectre de S est contenu dans le disque-unité. De plus, il est facile de vérifier que
$$\sigma(S) = \{\lambda^{-1}, \lambda \in \sigma(S^{-1})\}.$$
Comme $\|S^{-1}\| = 1$, le spectre de S^{-1} est aussi contenu dans le disque-unité, et donc le spectre de S est inclus dans le spectre-unité. Soit θ un complexe de module 1, et x_n le vecteur $x_n = \sum_{k=0}^{n-1} \theta^{-k} e_k$. Alors $\|x_n\| = \sqrt{n}$, et $\|(S - \theta\mathrm{Id})x_n\| = \sqrt{2}$. En faisant tendre n vers l'infini, on voit que $S - \theta\mathrm{Id}$ n'est pas inversible. Ainsi le spectre de S est égal au cercle-unité.

Solution 4

1. (a) Comme X est réflexif et séparable, X^* est séparable, et donc la restriction de la topologie faible restreinte à la boule-unité de X est métrisable. Il suffit donc de vérifier la continuité séquentielle de λ. Soit (x_n) une suite de P convergeant faiblement vers $x \in P$. Alors (Tx_n) converge faiblement vers Tx (en effet, pour tout $\phi \in X^*$, $\phi(Tx_n)$ converge vers $\phi(Tx)$ car $\phi \circ T \in X^*$). Ainsi, la suite $(\lambda(x_n)x_n)$ converge faiblement vers $\lambda(x)x$.
   Comme $(\lambda(x_n))$ est bornée (le spectre ponctuel est borné), il existe une sous-suite de $(\lambda(x_{n_k}))$ qui converge, soit λ' sa limite. Mais comme (x_{n_k}) converge faiblement vers x, $(\lambda(x_{n_k})x_{n_k})$ converge faiblement vers $\lambda' x$, et donc $\lambda' x = \lambda(x)x$ (la topologie faible est séparée), donc $\lambda' = \lambda(x)$ (car $x \neq 0$). En appliquant le raisonnement précédant à toute sous-suite de $\lambda(x_n)$, on montre que $(\lambda(x_n))$ converge vers $\lambda(x)$, d'où le résultat.

   (b) Par le théorème de Banach–Alaoglu, et parce que X est réfléxif, la boule-unité de X est faiblement compacte. Il suffit donc de montrer que $P \cup \{0\}$ est faiblement fermé. Soit (x_n) une suite de $P \cup \{0\}$ qui converge faiblement vers x. Posons $\lambda(0) = 0$. Comme précédemment $(Tx_n) = (\lambda(x_n)x_n)$ converge faiblement vers Tx, et il existe une sous-suite de $(\lambda(x_n))$ qui converge vers $\lambda \in \mathbf{C}$. On en déduit que $Tx = \lambda x$, et donc $x \in P \cup \{0\}$.
   Ainsi $P \cup \{0\}$ est faiblement compact métrisable, par une distance d. Ceci implique que P est réunion dénombrable de parties faiblement compactes, par exemple $P = \bigcup P_n$ avec $P_n = \{x \in \mathbf{P} \,:\, d(x, 0) \geqslant 1/n\}$.

   (c) Le spectre ponctuel de T est l'image de P par l'application λ ; comme l'image d'un compact est compact on déduit des questions précédentes que $\sigma_p(T)$ est réunion dénombrable de compacts de $\mathbf{C}$.
2. La condition nécéssaire est suffisante est que K est une partie (au plus) dénombrable et bornée de $\mathbf{R}$.
   Par le théorème spectral, tout opérateur autoadjoint $T \in \mathscr{L}(\ell_2)$ s'écrit $T = U{-}1M_f U$, où $U : \ell_2 \to L^2(X, \mu)$ est une isométrie, (X, μ) un espace mesuré σ-fini, et M_f l'opérateur de multiplication sur $L^2(X, \mu)$ par une fonction $f \in L^\infty(X, \mu)$ à valeurs réelles. Il est facile de vérifier que $\sigma_p(T) = \sigma_p(M_f)$. De plus $\lambda \in \sigma_p(M_f)$ si et seulement si $\mu(\{f = \lambda\}) > 0$. Dans un espace mesuré σ-fini, une partition en parties de mesure non nulle est nécessairement au plus dénombrable, d'où le résultat.
   Réciproquement, si K est dénombrable, non vide et borné, on peut écrire $K = \{\lambda_n, n \in \mathbf{N}\}$ pour une suite bornée (λ_n). On vérifie que l'opérateur diagonal défini par $T((x_n)) = (\lambda_n x_n)$ convient. Si $K = \emptyset$, on peut considérer l'opérateur de multiplication par la fonction $x \mapsto x$ sur $L^2[0, 1]$.

Solution 5

1. Soit $B \in \mathscr{L}(X)$ tel que $\mathrm{Id} - AB$ et $\mathrm{Id} - BA$ sont compacts. Alors les opérateurs AB et BA sont de la forme “identité moins un opérateur compact”, donc par l'alternative de Fredholm (+ un lemme utilisé dans sa preuve) on sait que $\ker(BA)$ est de dimension finie et $\mathrm{im}(AB)$ fermé de codimension finie. Comme $\ker(A) \subset \ker(BA)$ et $\mathrm{im}(A) \supset \mathrm{im}(AB)$, (ii) s'ensuit (puisque $\mathrm{im}(AB) \subset \mathrm{im}(A) \subset X$, $\mathrm{im}\, A$ est de codimension finie, et fermé comme somme directe d'un sous-espace fermé et d'un sous-espace de dimension finie).
2. Soit $F \subset X$ un sous-espace fermé complémenté. Par défintion, il existe un sous-espace fermé G tel que $X = F \oplus G$. Tout vecteur $x \in X$ s'écrit de manière unique $x = f + g$, avec $f \in F, g \in G$. Posons $P(x) = f$. On a bien $P^2 = P$ et $\mathrm{im}\, P = F$; il reste à voir que P est continue. Montrons que son graphe est fermé : soit $(x_n, P(x_n))$ une suite dans le graphe de P qui converge vers (x, f). Comme F est fermé, $f \in F$. De plus $(x_n - Px_n)$ est une suite de G qui converge vers $x - f$, et comme G est fermé on a $x - f \in G$. L'écritre $x = f + (x - f)$ montre alors que $f = P(x)$, d'où le résultat.

   Réciproquement, étant donné $P \in \mathscr{L}(F)$ tel que $P^2 = P$ et $\mathrm{im}\, P = F$, on vérifie que $X = \ker P \oplus F$, donc F est complémenté.
3. Supposons (ii). Comme $\ker A$ est de dimension finie, il est complémenté ; soit E un sous-espace fermé tel que $X = \ker A \oplus E$. Alors l'opérateur A est bijectif de E vers $\mathrm{im}\, A$. Comme ces sous-espaces sont fermés, cet opérateur est inversible, notons C son inverse.

   De plus, $\mathrm{im}\, A$ est complémenté car de codimension finie. Par la question précédente, il existe $P \in \mathscr{L}(F)$ tel que $P^2 = P$ et $\mathrm{im}\, P = \mathrm{im}\, A$. Posons $B = CP$.

   Alors pour tout $x \in \mathrm{im}\, A$, on a $(\mathrm{Id} - AB)x = x - ACPx = x - ACx = 0$. De même, pour tout $x \in E$, on a $(\mathrm{Id} - BA)x = x - CPAx = x - CAx = 0$.

   Il est facile de voir qu'un opérateur qui s'annule sur un sous-espace de codimension finie est de rang fini, donc compact. Ainsi, les opérateurs $\mathrm{Id} - AB$ et $\mathrm{Id} - BA$ sont compacts, ce qui montre (i).