ENS Lyon
M1 Analyse avancée

Mathématiques

Examen du 5 janvier 2012
Durée : 3 heures.

La consultation des notes de cours est autorisée.

Traiter cette partie sur la feuille de copie N. 1

Exercice 1

On considère l'équation dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$:

$$2xT' - T = \delta. \tag{$*$}$$

1. Déterminer toutes les solutions de $(*)$ à support contenu dans $\{0\}$.
2. Si $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ est une solution de $(*)$, déterminer les restrictions de T à $\mathcal{D}(]0,\infty[)$ et $\mathcal{D}(]-\infty,0[)$.
3. Montrer que les distributions $\sqrt{|x|}H(x)$ et $\sqrt{|x|}H(-x)$ vérifient l'équation
$$2xT' - T = 0.$$
(On a noté par H la fonction d'Heaviside, c'est-à-dire la fonction caractéristique de $\mathbf{R}^+$).
4. En déduire la forme générale des solutions de $(*)$.

Exercice 2

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(a_n) \subset \mathbf{R}$ pour que la série $\sum \delta_{a_n}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$, où δ_{a_n} désigne la masse de Dirac centrée au point a_n.
2. Démontrer que si $h \in C^1([-\pi,\pi])$, alors $\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} h(x)\sin(n+\frac{1}{2})x \,\mathrm{d}x = 0$.
3. On rappelle la formule
$$\sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}},$$
valable pour $x \in \mathbf{R}\backslash 2\pi\mathbf{Z}$ et $n \in \mathbf{N}$. Justifier l'égalité dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$,
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx} = c\sum_{k\in\mathbf{Z}} \delta_{2k\pi},$$
où $c \in \mathbf{R}$ est une constante que l'on déterminera.

Traiter cette partie sur la feuille de copie N. 2

Exercice 3

Soit H un espace de Hilbert complexe, muni d'une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ indexée par les **entiers relatifs** (et non pas par les entiers naturels). Soit S l'opérateur de décalage sur H défini par $S(e_n) = e_{n+1}$.

1. Quel est l'adjoint (hilbertien) de S ?
2. Quel est le spectre ponctuel de S ?
3. Quel est le spectre de S ?

Exercice 4

Les trois questions sont indépendantes.

1. Soit X un espace de Banach complexe séparable et réflexif, et $T \in \mathscr{L}(X)$ une application linéaire continue sur X. Si x est un vecteur propre de T, on note $\lambda(x)$ la valeur propre associée, c'est-à-dire l'unique nombre complexe vérifiant $T(x) = \lambda(x)x$. On note P l'ensemble des vecteurs propres de T de norme inférieure ou égale à 1.
   (a) Montrer que la fonction λ définie par
   $$\begin{array}{rccc} \lambda : & P & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ & x & \longmapsto & \lambda(x) \end{array}$$
   est continue quand on munit P de la restriction de la topologie faible de X.
   (b) Montrer que $P \cup \{0\}$ est faiblement compact, puis que P s'écrit comme réunion dénombrable de parties faiblement compactes de X.
   (c) En déduire que le spectre ponctuel de T peut s'écrire comme réunion dénombrable de parties fermées de $\mathbf{C}$.
2. Donner un exemple, sur un espace de Hilbert non séparable, d'un opereáteur dont le spectre ponctuel ne peut pas s'écrire comme réunion dénombrable de parties fermées de $\mathbf{C}$.
3. Que peut-on dire du spectre ponctuel d'un opérateur auto-adjoint sur un espace de Hilbert séparable ?

Exercice 5

Soit X un espace de Banach, et $A \in \mathscr{L}(X)$ une application linéaire continue sur X. Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence des deux assertions suivantes :

(i) Il existe un opérateur $B \in \mathscr{L}(X)$ tel que $\mathrm{Id} - AB$ et $\mathrm{Id} - BA$ sont compacts.
(ii) $\ker(A)$ est de dimension finie et $\mathrm{im}(A)$ est de codimension finie.

1. En supposant (i), montrer que $\ker(BA)$ est de dimension finie, $\mathrm{im}(AB)$ de codimension finie, et en déduire (ii).
2. Soit $F \subset X$ un sous-espace fermé. Montrer que F est complémenté si et seulement si il existe un opérateur $P \in \mathscr{L}(X)$ vérifiant $P^2 = P$ et $\mathrm{im}\, P = F$.
3. Démontrer l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i).