ENS Lyon
M1 Analyse avancée

Mathématiques

Examen du 8 janvier 2013 : Correction succincte
Durée : 3 heures.

La consultation des notes de cours est autorisée.

Exercice 1

Montrer que la fonction $f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1+ix_2}$ définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$. On pose $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2})$. Calculer $\bar{\partial} f$ au sens des distributions.

CORRECTION
Voir le livre de Claude Zuily, "Problèmes de distributions avec solutions détaillées", exercice 29.

Exercice 2

Soit $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. Soit $f(x) = h(|x|)$ une fonction radiale, où $h \in C^2(]0, \infty[)$ et $x \in \mathbf{R}^3$, solution classique pour $x \neq 0$ de l'équation

$$\Delta f + a^2 f = 0, \tag{1}$$

1. Pour $r > 0$, on pose $g(r) = rh(r)$. Écrire l'équation différentielle d'ordre 2 à laquelle satisfait $h(r)$ et l'équation à laquelle satisfait $g(r)$.
2. Trouver toutes les solutions classiques radiales f dans $\mathbf{R}^3\backslash\{0\}$ de (1).
3. Démontrer que toutes les solutions f obtenues au point précédent définissent des distributions dans $\mathbf{R}^3$.
4. Démontrer que dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)$ on a
$$(\Delta + a^2)f = c\delta,$$
où c est une constante que l'on déterminera.

CORRECTIONS
Voir le livre de Claude Zuily, "Problèmes de distributions avec solutions détaillées", exercice 31.

Exercice 3

Soit M le sous-espace de ℓ^∞ constitué des suites qui convergent en moyenne de Cesaró, i.e.

$$M = \left\{ x = (x_n) \in \ell^\infty \ : \ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} x_k \text{ existe} \right\}.$$

Pour $x = (x_n) \in \ell^\infty$, on note $p(x) = \limsup x_n$, et on définit l'opérateur de décalage $T : \ell_\infty \to \ell_\infty$ par $T((x_n)_{n\geqslant 0}) = ((x_{n+1})_{n\geqslant 0}$.

1. Montrer que p est sous-additive et positivement homogène.
2. Montrer qu'il existe $\Lambda \in (\ell^\infty)^*$ telle que
   (a) Pour tout $x \in \ell^\infty$, $\Lambda(Tx) = \Lambda(x)$.
   (b) Pour tout $x = (x_n) \in \ell^\infty$, $\liminf x_n \leqslant \Lambda(x) \leqslant \limsup x_n$.
3. Soit A un opérateur sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes
   (a) Il existe $a, b > 0$ tels que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathcal{H}$, on ait $a\|x\| \leqslant \|A^n x\| \leqslant b\|x\|$.
   (b) Il existe un espace de Hilbert $\mathcal{H}'$, un opérateur unitaire U sur $\mathcal{H}'$ et un isomorphisme $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ tels que $A = S^{-1}US$.

   Indication : *on pourra considérer* $[x, y] := \Lambda((\langle A^n x, A^n y\rangle)_{n\in\mathbf{N}})$.

CORRECTION

1. C'est évident

2. Soit la forme linéaire $\ell : M \to \mathbf{R}$ définie par $\ell(x) = \lim \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} x_k$. On a $\ell \leqslant p$, donc par le théorème de prolongement de Hahn–Banach, on peut prolonger ℓ en une forme linéaire Λ sur $(\ell^\infty)^*$ telle que $\Lambda \leqslant p$. En appliquant cette inégalité à $-x$, on obtient $\liminf x \leqslant \Lambda(x) \leqslant \limsup x$. On en déduit également que $|\Lambda(x)| \leqslant \|x\|_\infty$, ce qui montre que Λ est continue. Enfin, pour tout $x \in \ell^\infty$, on a $\ell(x - Tx) = 0$, ce qui montre que $\Lambda(x) = \Lambda(Tx)$.
3. L'implication (b) $\Longrightarrow$ (a) est facile. Pour l'autre implication, définissons un produit scalaire sur $\mathcal{H}$ par
$$[x, y] = \Lambda(\langle A^n x, A^n y\rangle),$$
et soit $|||x||| = \sqrt{[x,x]}$. C'est une norme hilbertienne qui est (par a.) équivalente à la norme intiale sur $\mathcal{H}$. En particulier $(\mathcal{H}, |||.|||)$ est complet. On choisit $S = id : (\mathcal{H}, \|.\|) \to (\mathcal{H}, |||.|||)$. Il reste à voir que $|||Ax||| = |||x|||$, ce qui est une conséquence de 2(a).

Exercice 4

Si (A_n) est une suite de parties non vides de $\mathbf{C}$, on définit $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$ par
$$\lambda \in \liminf A_n \iff \forall n \in \mathbf{N}, \exists \lambda_n \in A_n \text{ t.q. } \lambda = \lim \lambda_n.$$
$$\lambda \in \limsup A_n \iff \forall n \in \mathbf{N}, \exists \lambda_n \in A_n \text{ t.q. } \lambda \text{ est une valeur d'adhérence de } (\lambda_n).$$
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe, et T_n une suite d'opérateurs sur $\mathcal{H}$ qui converge vers T pour la norme-opérateur.

1. Montrer que
$$\limsup \sigma(T_n) \subset \sigma(T).$$
2. Montrer que si l'on suppose de plus que les opérateurs (T_n) sont normaux, alors
$$\sigma(T) \subset \liminf \sigma(T_n).$$
3. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$, et $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. Soit T_α l'opérateur défini par $T_\alpha e_n = e_{n+1}$ si $n \neq 0$, et $T_\alpha e_0 = \alpha e_1$. Calculer $\sigma(T_\alpha)$ et en déduire que la conclusion de la question 2. peut être fausse si l'on ne suppose pas que les opérateurs sont normaux.

CORRECTION

1. Soit $\lambda_n \in \sigma(T_n)$, et soit $\lambda = \lim \lambda_{n_k}$. Alors pour tout n, l'opérateur $T_{n_k} - \lambda_{n_k}\mathrm{Id}$ n'est pas inversible, et comme l'ensemble des opérateurs inversibles est ouvert, on en déduit que $T - \lambda\mathrm{Id}$ n'est pas inversible, donc $\lambda \in \sigma(T)$.
2. Soit $\lambda \notin \liminf \sigma(T_n)$, et montrons que $T - \lambda\mathrm{Id}$ est inversible. Par hypothèse, il existe $\varepsilon > 0$ tels que $d(\lambda, \sigma(T_n)) > \varepsilon$ pour une infinité de n. Quitte á extraire, on suppose que $d(\lambda, \sigma(T_n)) > \varepsilon$ pour tout n. On a alors $d(0, \sigma(T_n - \lambda\mathrm{Id})) > \varepsilon$, ce qui montre que le rayon spectral de $(T_n - \lambda\mathrm{Id})^{-1}$ est majoré par $1/\varepsilon$. Comme $(T_n - \lambda\mathrm{Id})^{-1}$ est normal (c'est une limite de polynômes en T_n), on a $\|(T_n - \lambda\mathrm{Id})^{-1}\| \leqslant 1/\varepsilon$ (pour un opérateur normal, le rayon spectral coïncide avec la norme). On vérifie que la suite $(T_n - \lambda\mathrm{Id})^{-1}$ est de Cauchy :
$$\|(T_m - \lambda\mathrm{Id})^{-1} - (T_n - \lambda\mathrm{Id})^{-1}\| = \|(T_m - \lambda\mathrm{Id})^{-1}(T_n - T_m)(T_n - \lambda\mathrm{Id})^{-1}\| \leqslant \frac{1}{\varepsilon^2}\|T_n - T_m\|.$$
Soit $B = \lim(T_n - \lambda\mathrm{Id})^{-1}$, alors $(T - \lambda\mathrm{Id})B = B(T - \lambda\mathrm{Id}) = \mathrm{Id}$, donc $\lambda \notin \sigma(T)$.
3. On a $\|T_\alpha^n\| = \max(1, |\alpha|)$, et donc $\rho(T_\alpha) = \lim \|T_\alpha^n\|^{1/n} = 1$. Si $\alpha \neq 0$, T_α est inversible et on calcule aussi $\|T_\alpha^{-n}\| = \max(1, 1/|\alpha|)$, donc $\rho(T_\alpha^{-1}) = 1$. On en déduit que $\sigma(T_\alpha)$ est inclus dans le cercle unité. Soit θ est un nombre complexe de module 1 et U l'opérateur unitaire défini par $Ue_n = \theta^n e_n$. On calcule que $UT_\alpha U^* = \theta T_\alpha$, ce qui montre que $\sigma(T_\alpha) = \sigma(\theta T_\alpha)$, et donc le spectre de T_α est égal au cercle-unité (puisqu'il est non vide).
Si $\alpha = 0$, alors tout nombre complexe λ vérifiant $|\lambda| < 1$ est une valeur propre de T_0, donc $\sigma(T_0)$ est égal au disque-unité. Comme T_α tend vers T_0 quand α tend vers 0, on a bien le contre-exemple recherché.

Exercice 5

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable, et T un opérateur sur $\mathcal{H}$. On définit l'image numérique de T comme
$$i(T) = \{\langle Tx, x\rangle \,:\, x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\} \subset \mathbf{C}.$$

1. Si L est un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}$, montrer que l'ensemble
$$\{x \in \mathcal{H} \,:\, \|x\| = 1 \text{ et } \langle Lx, x\rangle = 0\}$$
est connexe.
2. En déduire que l'ensemble $i(T)$ est convexe dans $\mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$.
Indication : *montrer que l'intersection avec toute droite de $\mathbf{R}^2$ est connexe.*
3. Montrer que $\sigma(T) \subset \overline{i(T)}$, où $\overline{i(T)}$ désigne l'adhérence de $i(T)$. **Indication :** *Montrer d'abord que si $\lambda \in \sigma(T)$, alors ou bien $T - \lambda\mathrm{Id}$ n'est pas d'image dense, ou bien* $\inf\{\|Tx - \lambda x\| \,:\, \|x\| = 1\} = 0$.
4. Montrer que si T est normal, alors $\operatorname{conv}\sigma(T) = \overline{i(T)}$

CORRECTION :

1. Par le théorème spectral, on se ramène au cas où L est l'opérateur de multiplication par une fonction $h \in L^\infty(\mu)$ sur un espace $L^2(\mu)$. On a alors $\langle Lf, f\rangle = \int h|f|^2 d\mu$. Pour $f, g \in L^2(\mu)$, le segment $t \mapsto \sqrt{(1-t)|f|^2 + t|g|^2}$ donne la convexité recherchée.
2. Comme $i(\alpha T + \beta\mathrm{Id}) = \alpha i(T) + \beta$, on peut se ramener à montrer que l'intersection de $i(T)$ avec l'axe des réels est connexe. Soit $a, b \in \mathbf{R} \cap i(T)$, et x, y des vecteurs unités tels que $\langle Tx, x\rangle = a$ et $\langle Ty, y\rangle = b$. Écrivons $T = T_1 + iT_2$, avec T_1 et T_2 autoadjoints. On a $\langle T_2x, x\rangle = \langle T_2y, y\rangle = 0$, et la question 1 appliquée avec $L = T_2$ implique que $[x, y] \subset i(T)$.
3. Supposons que $T - \lambda\mathrm{Id}$ soit d'image dense et qu'il existe une constante c telle que $\|(T - \lambda\mathrm{Id})x\| \geqslant c\|x\|$. Alors $T - \lambda\mathrm{Id}$ est injectif, et d'image fermée (prendre une suite de Cauchy dans l'image ...) donc surjectif, et bijectif.

   Soit $\lambda \in \sigma(T)$. Il y a deux possibilités
   - Si $T - \lambda\mathrm{Id}$ est d'image non dense, alors $(T - \lambda\mathrm{Id})^*$ n'est pas injectif, donc (prendre un vecteur propre) $\bar{\lambda} \in i(T^*)$, ce qui est équivalent à $\lambda \in i(T)$.
   - Sinon, il existe une suite (x_n) de vecteurs unitaires avec $\lim Tx_n - \lambda x_n = 0$, et donc $\lambda = \lim\langle Tx_n, x_n\rangle \in \overline{i(T)}$.
4. On a vu que $\sigma(T) \subset \overline{i(T)}$. Comme $i(T)$ est convexe, son adhérence l'est aussi, donc $\operatorname{conv}\sigma(T) \subset \overline{i(T)}$. On remarque que $\operatorname{conv}(\sigma(T))$ est convexe compact (en dimension finie, l'enveloppe convexe d'un compact est compact, on peut le voir via le théorème de Carathéorodory). Si l'inclusion était stricte, par séparation, il exiserait $x \in i(T)$ et une forme $\mathbf{R}$-linéaire sur $\mathbf{C} \approx \mathbf{R}^2$, de la forme $z \mapsto \Re(\theta z)$ pour un $\theta \in \mathbf{C}$, séparant $\{x\}$ de $\sigma(T)$. Autrement dit, on aurait
$$\max_{\lambda \in \sigma(T)} \Re(\theta\lambda) < \Re(\theta x).$$
   Par le théorème spectral, on peut supposer que T est l'opérateur de multiplication par une fonction $h \in L^\infty(\mu)$ sur un espace $L^2(\mu)$. Comme $x \in i(T)$, il existe $f \in L^2(\mu)$ avec $\int |f|^2 d\mu = 1$ et $\int h|f|^2 = x$, donc
$$\max_{\lambda \in \sigma(T)} \Re(\theta\lambda) < \Re(\theta x) = \int \Re(\theta h) d\mu.$$
   Mais c'est absurde car $h \in \sigma(T)$ μ-p.p., et donc $\Re(\theta h) \leqslant \max_{\lambda \in \sigma(T)} \Re(\theta\lambda)$ μ-p.p.