ENS Lyon
M1 Analyse avancée

Mathématiques

**Examen du 8 janvier 2013**
Durée : 3 heures.

La consultation des notes de cours est autorisée.

Traiter cette partie sur la feuille de copie N. 1

## Exercice 1

Montrer que la fonction $f(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1 + ix_2}$ définit un élément de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^2)$. On pose $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_1} + i\frac{\partial}{\partial x_2})$. Calculer $\bar{\partial} f$ au sens des distributions.

## Exercice 2

Soit $a \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. Soit $f(x) = h(|x|)$ une fonction radiale, où $h \in C^2(]0, \infty[)$ et $x \in \mathbf{R}^3$, solution classique pour $x \neq 0$ de l'équation

$$\Delta f + a^2 f = 0, \tag{1}$$

1. Pour $r > 0$, on pose $g(r) = rh(r)$. Écrire l'équation différentielle d'ordre 2 à laquelle satisfait $h(r)$ et l'équation à laquelle satisfait $g(r)$.
2. Trouver toutes les solutions classiques radiales $f$ dans $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ de (1).
3. Démontrer que toutes les solutions $f$ obtenues au point précédent définissent des distributions dans $\mathbf{R}^3$.
4. Démontrer que dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^3)$ on a
$$(\Delta + a^2) f = c\delta,$$
où $c$ est une constante que l'on déterminera.

Traiter cette partie sur la feuille de copie N. 2

**Exercice 3**

Soit $M$ le sous-espace de $\ell_\infty$ constitué des suites qui convergent en moyenne de Cesaró, i.e.

$$M = \left\{ x = (x_n) \in \ell_\infty \,:\, \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} x_k \text{ existe} \right\}.$$

Pour $x = (x_n) \in \ell_\infty$, on note $p(x) = \limsup x_n$, et on définit l'opérateur de décalage $T : \ell_\infty \to \ell_\infty$ par $T((x_n)_{n\geqslant 0}) = ((x_{n+1})_{n\geqslant 0}$.

1. Montrer que $p$ est sous-additive et positivement homogène.
2. Montrer qu'il existe $\Lambda \in (\ell_\infty)^*$ telle que
   (a) Pour tout $x \in \ell_\infty$, $\Lambda(Tx) = \Lambda(x)$.
   (b) Pour tout $x = (x_n) \in \ell_\infty$, $\liminf x_n \leqslant \Lambda(x) \leqslant \limsup x_n$.
3. Soit $A$ un opérateur sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Montrer l'équivalence entre les propriétés suivantes
   (a) Il existe $a, b > 0$ tels que, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathcal{H}$, on ait $a\|x\| \leqslant \|A^n x\| \leqslant b\|x\|$.
   (b) Il existe un espace de Hilbert $\mathcal{H}'$, un opérateur unitaire $U$ sur $\mathcal{H}'$ et un isomorphisme $S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$ tels que $A = S^{-1}US$.

   **Indication :** *on pourra considérer* $[x, y] := \Lambda((\langle A^n x, A^n y\rangle)_{n\in\mathbf{N}})$.

**Exercice 4**

Si $(A_n)$ est une suite de parties non vides de $\mathbf{C}$, on définit $\liminf A_n$ et $\limsup A_n$ par

$$\lambda \in \liminf A_n \iff \forall n \in \mathbf{N}, \exists \lambda_n \in A_n \text{ t.q. } \lambda = \lim \lambda_n.$$

$$\lambda \in \limsup A_n \iff \forall n \in \mathbf{N}, \exists \lambda_n \in A_n \text{ t.q. } \lambda \text{ est une valeur d'adhérence de } (\lambda_n).$$

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe, et $T_n$ une suite d'opérateurs sur $\mathcal{H}$ qui converge vers $T$ pour la norme-opérateur.

1. Montrer que
$$\limsup \sigma(T_n) \subset \sigma(T).$$
2. Montrer que si l'on suppose de plus que les opérateurs $(T_n)$ sont normaux, alors
$$\sigma(T) \subset \liminf \sigma(T_n).$$
3. Soit $\alpha \in \mathbf{R}$, et $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$ une base hilbertienne de $\mathcal{H}$. Soit $T_\alpha$ l'opérateur défini par $T_\alpha e_n = e_{n+1}$ si $n \neq 0$, et $T_\alpha e_0 = \alpha e_1$. Calculer $\sigma(T_\alpha)$ et en déduire que la conclusion de la question 2. peut être fausse si l'on ne suppose pas que les opérateurs sont normaux.

**Exercice 5**

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe séparable, et $T$ un opérateur sur $\mathcal{H}$. On définit l'image numérique de $T$ comme

$$i(T) = \{\langle Tx, x\rangle \,:\, x \in \mathcal{H}, \|x\| = 1\} \subset \mathbf{C}.$$

1. Si $L$ est un opérateur auto-adjoint sur $\mathcal{H}$, montrer que l'ensemble
$$\{x \in \mathcal{H} \,:\, \|x\| = 1 \text{ et } \langle Lx, x\rangle = 0\}$$
   est connexe.
2. En déduire que l'ensemble $i(T)$ est convexe dans $\mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$.
   **Indication :** *montrer que l'intersection avec toute droite de* $\mathbf{R}^2$ *est connexe.*
3. Montrer que $\sigma(T) \subset \overline{i(T)}$, où $\overline{i(T)}$ désigne l'adhérence de $i(T)$.
   **Indication :** *Montrer d'abord que si* $\lambda \in \sigma(T)$*, alors ou bien* $T - \lambda \mathrm{Id}$ *n'est pas d'image dense, ou bien* $\inf\{\|Tx - \lambda x\| \,:\, \|x\| = 1\} = 0$.
4. Montrer que si $T$ est normal, alors $\operatorname{conv} \sigma(T) = \overline{i(T)}$