ENS Lyon
M1 Analyse avancée

Mathématiques

Examen du 15 novembre 2012
Durée : 2 heures.

La consultation des notes de cours est autorisée.

Exercice 1

Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, et $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une base hilbertienne de H. Soit $(\lambda_n)_{n\in N}$ une suite de réels. A quelle condition est-ce que la suite $(\lambda_n e_n)$ converge

1. fortement ?
2. faiblement ?

SOLUTION.
1. $(\lambda_n e_n)$ converge fortement si et seulement si $\lim \lambda_n = 0$, auquel cas la limite est 0.
2. Montrons que $(\lambda_n e_n)$ converge faiblement si et seulement si (λ_n) est bornée. Si (λ_n) est bornée, alors pour tout vecteur $x \in H$, on a $\sum \langle x, e_n\rangle^2 = \|x\|^2 < +\infty$, ce qui montre que $\lim\langle x, \lambda_n e_n\rangle = 0$. Réciproquement, si $(\lambda_n e_n)$ converge faiblement, elle est bornée (d'après le théorème de Banach–Steinhaus).

Exercice 2

Soit X un espace vectoriel topologique. Le but de cet exercice est de montrer que X vérifie la propriété de séparation suivante : pour tout voisinage V de 0, il existe une fonction continue f de X dans $\mathbf{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f(x) = 1$ si $x \notin V$.

1. Expliquer pourquoi il existe une suite $(V_n)_{n\geqslant 0}$ de voisinages de 0 tels que $V_0 = V$, et $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$ pour tout $n \geqslant 0$.
2. On note D l'ensemble des rationnels dyadiques de $[0,1[$, i.e.

$$D = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k 2^{-k} \ : \ n \in \mathbf{N},\ \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{0,1\}^n \right\}.$$

   Pour $r \in D$, on définit $A(r) \subset X$ par la formule

$$A\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k 2^{-k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k V_k.$$

   On pose aussi $A(r) = X$ si $r \in [1, +\infty[$. Montrer que pour tous $r, s \in D$, on a

$$A(r) + A(s) \subset A(r+s).$$

3. Montrer que la fonction f définie pour $x \in X$ par

$$f(x) = \inf\{r \in D \cup \{1\} \ : \ x \in A(r)\}$$

   est continue.

SOLUTION.
1. C'est une conséquence de la continuité de l'addition en $(0,0)$.
2. L'inclusion est trivialement vérifiée si $r + s \geqslant 1$. Montrons par récurrence sur n qu'elle est vraie si r et s sont des multiples entiers de 2^{-n}, et soit $r' = r + \varepsilon 2^{-n+1}$ et $s' = s + \eta 2^{-(n+1)}$, avec $\varepsilon, \eta \in \{0,1\}$. Par hypothèse de récurrence, $A(r) + A(s) \subset A(r+s)$, et donc

$$A(r') + A(s') \subset A(r+s) + \varepsilon V_{n+1} + \eta V_{n+1}.$$

Si $\varepsilon = 0$ ou $\eta = 0$, la conclusion est immédiate. Si $\varepsilon = \eta = 1$, on a

$$A(r') + A(s') \subset A(r+s) + V_n = A(r+s) + A(2^{-n}) \subset A(r+s+2^{-n}) = A(r'+s'),$$

où la dernière inclusion utilise l'hypothèse de récurrence.

3. On utilise le fait que si $r, s \in D$ vérifient $r \leqslant s$, alors $A(r) \subset A(s)$, comme conséquence de la question précédente. Pour tout $r \in D$, on a $A(r) \subset V_0$, donc $f(x) = 1$ si $x \notin V_0$. On a $f(0) = 0$, et f est continue en 0 (car $f \leqslant 2^{-n}$ sur V_n). Par ailleurs, f vérifie l'inégalité

$$|f(x) - f(y)| \leqslant f(x - y)$$

(conséquence de la question précédente), donc f est continue en tout point.

Exercice 3

Soit X un espace de Banach, A une partie non vide de X et x un point de X. On dit qu'un point $a_0 \in A$ est un point de A à distance minimale de x si

$$\|x - a_0\| = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

1. On suppose (dans cette question seulement) que X est réflexif et que A est faiblement fermé. Soit $x \in X$. Montrer qu'il existe un point de A à distance minimale de x.
2. On suppose (dans cette question seulement) que X est uniformément convexe et que A est convexe et fermé.
   (a) Soit $x \in X$. Montrer qu'il exsite un unique point de A à distance minimale de x. On note ce point $\pi_A(x)$.
   (b) Montrer que l'application $\pi_A : X \to X$ est continue.

SOLUTION.

1. Soit (a_n) une suite de A telle que $\lim \|a_n - x\| = \inf_{a \in A} \|a - x\|$. La suite (a_n) est bornée. Comme X est réflexif, on peut extraire de (a_n) une sous-suite qui converge pour la topologie faible. Notons a sa limite. Comme A est faiblement fermé, $a \in A$. Si $\phi \in X^*$ est une forme linéaire de norme 1 telle que $\phi(a - x) = \|a - x\|$, on a

$$\|a - x\| = \phi(a - x) = \lim_{n \to \infty} \phi(a_n - x) \leqslant \lim \|a_n - x\| = \inf_{a \in A} \|a - x\|.$$

2a. X est réflexif (théorème de Milman–Pettis), et A est faiblement fermé (car il est convexe fermé), donc l'existence d'un point à distance minimale découle de la question précédente. Supposons que a et a' sont deux points de A à distance minimale de x. Sans perte de généralité, on peut supposer $x = 0$, et soit $d = \|a\| = \|a'\|$. La convexité uniforme de X implique que $\|\frac{1}{2}(\frac{a}{d} + \frac{a'}{d})\| < 1$, donc $\|\frac{1}{2}(a + a')\| < d$, ce qui n'est pas possible car $\frac{1}{2}(a + a') \in A$.

2b. Si c'était faux, on pourrait trouver une suite (x_n) de X convergeant vers x, et $\varepsilon > 0$ tel que $\|y_n - y\| > \varepsilon$, où l'on a posé $y_n = \pi_A(x_n)$ et $y = \pi_A(x)$. Sans perte de généralité, on peut supposer que $x = 0$ et $\|y\| = 1$ (si $x \in A$ le résultat est évident). On a (en utilisant la définition de π_A)

$$\|x_n - y_n\| \leqslant \|x_n - y\| \leqslant \|x_n\| + \|y\| \longrightarrow 1$$

$$\|x_n - y_n\| \geqslant \|y_n\| - \|x_n\| \geqslant \|y\| - \|x_n\| \longrightarrow 1$$

On en déduit que $\lim \|y_n\| = \lim \|x_n - y_n\| = 1$. Posons $z_n = y_n / \|y_n\|$. Comme $\|z_n - y_n\| \longrightarrow 0$, on a $\|z_n - y\| \geqslant \|y_n - y\| - \|y_n - z_n\| > \varepsilon/2$ pour n assez grand. Soit δ correspondant à $\varepsilon/2$ dans la définition de la convexité uniforme. On a $\|\frac{z_n + y}{2}\| \leqslant 1 - \delta$ pour n assez grand, et donc

$$\|y_n + y\| \leqslant \|y_n - z_n\| + \|z_n + y\| < \|y_n - z_n\| + 2(1 - \delta) \longrightarrow 2(1 - \delta).$$

C'est une contradiction : le point $\frac{y_n + y}{2}$ est dans A, et (pour n assez grand) sa distance à 0 est strictement inférieure à 1, ce qui contredit la minimalité de y.

Exercice 4

Soit $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, et p' l'exposant conjugué de p. Soit (α_n) une suite de nombres réels telle que, pour tout $(x_n) \in \ell_p$, on ait $\sum |\alpha_n x_n| < +\infty$. Monter que $(\alpha_n) \in \ell_{p'}$.

SOLUTION.

Pour $N \in \mathbf{N}$, soit Λ_N la forme linéaire continue sur ℓ_p définie par $\Lambda(x_n) = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n$. L'hypothèse implique que la famille $\{\Lambda_N ; N \in \mathbf{N}\}$ est ponctuellement bornée dans $(\ell_p)^*$. Par le théorème de Banach–Steinhaus, elle est bornée, et donc

$$\sup_{N \in \mathbf{N}} \|\Lambda_N\|_{(\ell_p)^*} < +\infty.$$

Comme le dual de ℓ_p s'identifie à $\ell_{p'}$, on a

$$\sup_{N \in \mathbf{N}} \|(\alpha_1, \dots, \alpha_N, 0, 0, \dots)\|_{\ell_{p'}} < +\infty$$

et donc (par convergence monotone) $\|(\alpha_n)\|_{\ell_{p'}} < +\infty$.

Exercice 5

Soit $1 \leqslant p < +\infty$, et E un sous-espace fermé de $L^p([0,1])$. On suppose que $E \subset L^\infty([0,1])$.

1. Montrer que l'application "identité" est continue de E dans L^∞, donc qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $f \in E$, on ait

$$\|f\|_{L^\infty} \leqslant C\|f\|_{L^p}.$$

2. En déduire qu'il existe une constante $D > 0$ telle que, pour tout $f \in E$, on ait

$$\|f\|_{L^\infty} \leqslant D\|f\|_{L^2}.$$

3. En déduire que E est de dimension finie et vérifie $\dim(E) \leqslant D^2$.

SOLUTION.

1. Considérons l'application $\mathrm{id} : (E, \|\cdot\|_p) \to (L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$. C'est une application entre espaces de Banach (E est fermé dans L^p), donc pour montrer qu'elle est continue, il suffit de voir que son graphe est fermé. Soit (f_n, f_n) une suite dans le graphe de id qui converge vers $(f, g) \in L^p \times L^\infty$. On a $\|f_n - f\|_p \to 0$ et $\|f_n - g\|_\infty \to 0$. Comme $\|\cdot\|_p \leqslant \|\cdot\|_\infty$, cela implique que $\|f_n - g\|_p \to 0$, d'où $f = g$. Ainsi le graphe de id est fermé, et la continuité implique l'existence d'une constante C telle que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_p$ pour tout $f \in E$.

2. Si $1 \leqslant p \leqslant 2$, le résultat est immédiat (avec $D = C$) car $\|\cdot\|_p \leqslant \|\cdot\|_2$. Si $p > 2$, on a pour presque tout $t \in [0,1]$ l'inégalité $|f(t)|^p \leqslant \|f\|_\infty^{p-2}|f(t)|^2$. En intégrant cette inégalité, on obtient pour $f \in E$,

$$\|f\|_\infty^p \leqslant C^p\|f\|_p^p \leqslant C^p\|f\|_\infty^{p-2}\|f\|_2^2,$$

d'où le résultant souhaité avec $D = C^{p/2}$.

3. Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille orthonormale (au sens L^2) dans E. On voit les (f_i) comme des fonctions (on choisit un représentant à valeurs finies dans la classe d'équivalence pour l'égalité presque partout). Alors il existe un ensemble A de mesure 1 dans $[0,1]$ tel que, pour tous réels $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, on ait pour tout $t \in A$,

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i(t)\right| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\right\|_\infty$$

En effet, par continuité il suffit de vérifier cette condition pour $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ rationnels, puis on utilise le fait qu'une intersection dénombrable d'ensembles de mesure 1 est de mesure 1.

Alors, pour tout $t \in A$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(t)^2 \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{n} f_i(t) f_i\right\|_\infty \leqslant D\left\|\sum_{i=1}^{n} f_i(t) f_i\right\|_2 = D\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(t)^2\right)^{1/2}$$

d'où on tire $\sum f_i(t)^2 \leqslant D^2$. En intégrant sur $[0,1]$, on a $n \leqslant D^2$, ce qui montre que E est de dimension finie, inférieure à D^2.