ENS Lyon
M1 Analyse avancée

Mathématiques

Examen du 15 novembre 2012
Durée : 2 heures.

La consultation des notes de cours est autorisée.

Exercice 1

Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, et $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une base hilbertienne de H. Soit $(\lambda_n)_{n\in N}$ une suite de réels. A quelle condition est-ce que la suite $(\lambda_n e_n)$ converge

1. fortement ?
2. faiblement ?

Exercice 2

Soit X un espace vectoriel topologique. Le but de cet exercice est de montrer que X vérifie la propriété de séparation suivante : pour tout voisinage V de 0, il existe une fonction continue f de X dans $\mathbf{R}$ telle que $f(0) = 0$ et $f(x) = 1$ si $x \notin V$.

1. Expliquer pourquoi il existe une suite $(V_n)_{n\geqslant 0}$ de voisinages de 0 tels que $V_0 = V$, et $V_{n+1} + V_{n+1} \subset V_n$ pour tout $n \geqslant 0$.
2. On note D l'ensemble des rationnels dyadiques de $[0, 1[$, i.e.
$$D = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k 2^{-k} \; : \; n \in \mathbf{N}, \; \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n \in \{0, 1\}^n \right\}.$$
Pour $r \in D$, on définit $A(r) \subset X$ par la formule
$$A\left(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k 2^{-k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k V_k.$$
On pose aussi $A(r) = X$ si $r \in [1, +\infty[$. Montrer que pour tous $r, s \in D$, on a
$$A(r) + A(s) \subset A(r + s).$$
3. Montrer que la fonction f définie pour $x \in X$ par
$$f(x) = \inf\{r \in D \cup \{1\} \; : \; x \in A(r)\}$$
est continue.

Exercice 3

Soit X un espace de Banach, A une partie non vide de X et x un point de X. On dit qu'un point $a_0 \in A$ est un point de A à distance minimale de x si
$$\|x - a_0\| = \inf_{a\in A} \|x - a\|.$$

1. On suppose (dans cette question seulement) que X est réflexif et que A est faiblement fermé. Soit $x \in X$. Montrer qu'il existe un point de A à distance minimale de x.
2. On suppose (dans cette question seulement) que X est uniformément convexe et que A est convexe et fermé.
   (a) Soit $x \in X$. Montrer qu'il exsite un unique point de A à distance minimale de x. On note ce point $\pi_A(x)$.
   (b) Montrer que l'application $\pi_A : X \to X$ est continue.

Exercice 4

Soit $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, et p' l'exposant conjugué de p. Soit (α_n) une suite de nombres réels telle que, pour tout $(x_n) \in \ell_p$, on ait $\sum |\alpha_n x_n| < +\infty$. Monter que $(\alpha_n) \in \ell_{p'}$.

Exercice 5

Soit $1 \leqslant p < +\infty$, et E un sous-espace fermé de $L^p([0,1])$. On suppose que $E \subset L^\infty([0,1])$.

1. Montrer que l'application "identité" est continue de E dans L^∞, donc qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $f \in E$, on ait
$$\|f\|_{L^\infty} \leqslant C\|f\|_{L^p}.$$
2. En déduire qu'il existe une constante $D > 0$ telle que, pour tout $f \in E$, on ait
$$\|f\|_{L^\infty} \leqslant D\|f\|_{L^2}.$$
3. En déduire que E est de dimension finie et vérifie $\dim(E) \leqslant D^2$.