ENS Lyon — Mathématiques

M1 Analyse avancée

Examen du 9 novembre 2011 — Correction

Durée : 2 heures.

La consultation des notes de cours est autorisée.

Exercice 1

Soient X et Y des espaces vectoriels topologiques localement convexes. Soit $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ (respectivement $(q_\beta)_{\beta\in B}$) une famille séparante de semi-normes induisant la topologie de X (respectivement de Y). Soit $T : X \to Y$ une application linéaire. Montrer que T est continue si et seulement si, pour tout $\beta \in B$, il existe un ensemble fini $I \subset A$ et une constante $C > 0$ tels que, pour tout $x \in X$,

$$q_\beta(Tx) \leqslant C \sum_{\alpha\in I} p_\alpha(x).$$

CORRECTION : Supposons T continue. Pour tout $\beta \in B$, l'image reciproque par T de l'ouvert $\{q_\beta < 1\}$ contient un voisinage de 0, que l'on peur supposer de la forme

$$\bigcap_{\alpha\in I} \{p_\alpha < \varepsilon\}$$

pour $\varepsilon > 0$ et $I \subset A$ fini. Pour tout $x \in X$, on a alors

$$\max_{\alpha\in I} p_\alpha(x) < \varepsilon \Longrightarrow q_\beta(Tx) < 1,$$

ce qui par homogénéité implique

$$q_\beta(Tx) \leqslant \frac{1}{\varepsilon} \max_{\alpha\in I} p_\alpha(x) \leqslant \frac{\operatorname{card} I}{\varepsilon} \sum_{\alpha\in I} p_\alpha(x).$$

Réciproquement, il suffit de montrer que T est continue en 0. Soit V un voisinage de 0, que l'on peut supposer de la forme

$$V = \bigcap_{\beta\in J} \{q_\beta < \varepsilon\}.$$

Pour tout $\beta \in J$, soit $I_\beta \subset A$ fini et $C_\beta > 0$ donnés par l'énoncé. On pose $I = \bigcup_{\beta\in J} I_\beta$ (I est fini) et $C = \max_{\beta\in J} C_\beta$. Alors pour tout $x \in X$,

$$\max_{\beta\in J} q_\beta(Tx) \leqslant \max_{\beta\in J} C_\beta \sum_{\alpha\in I_\beta} p_\alpha(x) \leqslant C \sum_{\alpha\in I} p_\alpha(x) \leqslant C \operatorname{card} I \max_{\alpha\in I} p_\alpha(x),$$

ce qui montre que $T^{-1}(V)$ contient un voisinage de 0 : l'ensemble $\bigcap_{\alpha\in I}\{p_\alpha < (C \operatorname{card} I)^{-1}\}$.

Exercice 2

Soit $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, et p' l'exposant conjugué de p. Soit (α_n) une suite de nombres réels telle que, pour tout $(x_n) \in \ell_p$, on ait $\sum |\alpha_n x_n| < +\infty$. Monter que $(\alpha_n) \in \ell_{p'}$.

CORRECTION : Pour $N \in \mathbf{N}$, soit Λ_N la forme linéaire continue sur ℓ_p définie par $\Lambda(x_n) = \sum_{n=1}^N \alpha_n x_n$.

L'hypothèse implique que la famille $\{\Lambda_N; N \in \mathbf{N}\}$ est ponctuellement bornée dans $(\ell_p)^*$. Par le théorème de Banach–Steinhaus, elle est bornée, et donc

$$\sup_{N\in\mathbf{N}} \|\Lambda_N\|_{(\ell_p)^*} < +\infty.$$

Comme le dual de ℓ_p s'identifie à $\ell_{p'}$, on a

$$\sup_{N\in\mathbf{N}} \|(\alpha_1, \dots, \alpha_N, 0, 0, \dots)\|_{\ell_{p'}} < +\infty$$

et donc (par convergence monotone) $\|(\alpha_n)\|_{\ell_{p'}} < +\infty$.

Exercice 3

1. Montrer qu'il existe $\Lambda \in (\ell_\infty)^*$ vérifiant, pour tout $x = (x_n) \in \ell_\infty$,
$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \Lambda(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n. \tag{1}$$
2. Montrer qu'il existe $\Lambda \in (\ell_\infty)^*$ qui vérifie (1) et qui est invariante par décalage, c'est-à-dire telle que, pour tout $(x_n) \in \ell_\infty$,
$$\Lambda(x_0, x_1, x_2, \dots) = \Lambda(x_1, x_2, x_3, \dots).$$
Indication. On pourra introduire le sous-espace $M \subset \ell_\infty$ des suites qui convergent en moyenne de Cesàro, i.e. telles que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_0 + \cdots + x_{n-1})$ existe.

CORRECTION : 1. Soit $c \subset \ell_\infty$ le sous-espace des suites convergentes, et $\lim : c \to \mathbf{R}$ la forme linéaire continue qui à une suite associe sa limite. On remarque que $|\limsup|$ est une semi-norme sue ℓ_∞ et que $\lim = \limsup$ sur c. Par le théorème de prolongement de Hahn–Banach, il existe une forme linéaire Λ sur ℓ_∞ qui prolonge lim en vérifiant $\Lambda \leqslant |\limsup|$. Comme $|\limsup| \leqslant \|\cdot\|_\infty$, Λ est continue.

Soit $(x_n) \in \ell_\infty$, et (u_n) la suite constante de terme 1. Pour tout $t \in \mathbf{R}$, on a
$$\Lambda((x_n)) + t = \Lambda((x_n + tu_n)) \leqslant |\limsup(x_n + tu_n)| = |t + \limsup(x_n)|.$$
En prenant $t = -\limsup x_n$, on obtient que $\Lambda((x_n)) \leqslant \limsup x_n$. En appliquant cette inégalité à $(-x_n)$, on a $\Lambda((x_n)) \geqslant \liminf x_n$.

2. Soit M le sous-espace des suites convergent en moyenne de Cesàro, et $\phi : M \to \mathbf{R}$ la forme linéaire qui a une suite associe sa limite de Césaro. On a $\phi \leqslant \limsup$, et on peut prolonger ϕ en une forme linéaire Λ qui vérifie $\Lambda \leqslant |\limsup|$. On montre que $\liminf \leqslant \Lambda \leqslant \limsup$ comme à la question précédente. Enfin, pour tout suite $(x_n) \in \ell_\infty$, la suite $(x_n - x_{n+1})$ converge en moyenne de Cesàro vers 0, et donc $\Lambda((x_n)) = \Lambda((x_{n+1}))$.

Exercice 4

Soit E un sous-espace fermé de $L^2([0,1])$. On suppose que $E \subset L^\infty([0,1])$.

1. Montrer (à l'aide du théorème du graphe fermé) qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $f \in E$, on ait
$$\|f\|_{L^\infty} \leqslant C\|f\|_{L^2}.$$
2. *(Question plus difficile)*. En déduire que E est de dimension finie.

CORRECTION : 1. Considérons l'application $\mathrm{Id} : (E, \|\cdot\|_2) \to (L^\infty, \|\cdot\|_\infty)$. C'est une application entre espaces de Banach (E est fermé dans L^2), donc pour montrer qu'elle est continue, il suffit de voir que son graphe est fermé. Soit (f_n, f_n) une suite dans le graphe de Id qui converge vers $(f, g) \in L^2 \times L^\infty$. On a $\|f_n - f\|_2 \to 0$ et $\|f_n - g\|_\infty \to 0$. Comme $\|\cdot\|_2 \leqslant \|\cdot\|_\infty$, cela implique que $\|f_n - g\|_2 \to 0$, d'où $f = g$. Ainsi le graphe de Id est fermé, et la continuité implique l'existence d'une constante C telle que $\|f\|_\infty \leqslant C\|f\|_2$ pour tout $f \in E$.

2. Soit $(f_1, \dots, f_n)$ une famille orthonormale (au sens L^2) dans E. On voit les (f_i) comme des fonctions (on choisit un représentant à valeurs finies dans la classe d'équivalence pour l'égalité presque partout). Alors, pour tout $t \in [0,1]$, on a
$$\sum_{i=1}^n f_i(t)^2 \leqslant \left\| \sum_{i=1}^n f_i(t) f_i \right\|_\infty \leqslant C \left\| \sum_{i=1}^n f_i(t) f_i \right\|_2 = C \left(\sum_{i=1}^n f_i(t)^2 \right)^{1/2}$$
d'où on tire $\sum f_i(t)^2 \leqslant C^2$. En intégrant sur $[0,1]$, on a $n \leqslant C^2$, ce qui montre que E est de dimension finie.

Exercice 5

Question préliminaire. Soit X un espace de Banach, et (x_n) une suite de X qui converge faiblement vers x. Montrer qu'il existe une suite (y_n) d'éléments de $\mathrm{conv}\{x_n : x \in \mathbf{N}\}$ qui converge fortement vers x.

Dans cet exercice, on se donne X un espace de Banach réflexif, $T : X \to X$ une application linéaire continue vérifiant $\|T\| \leqslant 1$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose
$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k,$$
avec la convention que $T^0 = \mathrm{Id}$.

1. Montrer que pour tout $x \in X$, il existe une sous-suite $(S_{n_k}x)$ de la suite $(S_n x)$ qui converge faiblement ; on note y sa limite. Montrer que $\lim_{k\to\infty} \|TS_{n_k} - S_{n_k}\| = 0$, et en déduire que $Ty = y$.
2. Montrer ensuite qu'il existe une sous-suite (A_k), avec $A_k \in \text{conv}\{S_n : n \in \mathbf{N}\}$ telle que $(A_k x)$ converge fortement vers y.
3. Montrer que pour tout $A \in \text{conv}\{T^n : n \in \mathbf{N}\}$, on a $\lim_{n\to\infty} S_n Ax - S_n x = 0$.
4. En déduire que pout tout $x \in X$, la suite $(S_n x)$ converge fortement.
5. Pour $x \in X$, on pose $P(x) = \lim_{n\to\infty} S_n x$. Montrer que P est une application linéaire continue, qui est un projecteur (c'est-à-dire qu'elle vérifie $P^2 = P$). Déterminer l'image de P.
6. Application : on prend $X = L^2([0,1])$, et T l'application linéaire définie par

$$(Tf)(x) = f(x + \theta \mod 1)$$

où θ est un nombre irrationnel. Pour $f \in X$, quelle est la limite de la suite $S_n f$?

CORRECTION : QP. Soit $A = \text{conv}\{x_n\}$, y est dans l'adhérence faible de A. Mais comme l'adhérence forte A est convexe, elle est aussi faiblement fermée, donc coïncide avec l'adhérence faible. Ainsi y est dans l'adhérence forte de A, d'où le résultat.

1. On remarque que $\|T^n\| \leqslant 1$, pour tout n, d'où $\|S_n\| \leqslant 1$ pour tout n. Donc, pour tout $x \in X$, la suite $(S_n x)$ est bornée, sans perte de généralité on peut supposer $S_n x \in B_X$. Comme X est réflexif, B_X est faiblement compact. Si X est de plus séparable, X^* l'est aussi (car X^{**} l'est), donc $B_{X^{**}}$ est métrisable pour la topologie faible*. C'est équivalent à dire que B_X est métrisable pour la topologie faible, donc faiblement séquentiellement compact, d'où le résultat. Si X n'est pas séparable, on applique ce qui précède au sous-espace fermé engendré par $(S_n x)$, qui est séparable.

On a $(TS_n - S_n)(x) = \frac{1}{n}(T^n x - x)$, donc $\|TS_n - S_n\| \leqslant 2/n$. Enfin, on remarque que T est continue quand on munit X de sa topologie faible (car pour tout $\phi \in X^*$, $\phi \circ T$ est continue). Ceci implique que $TS_n x$ converge faiblement vers Ty. Mais comme $(TS_n x - S_n x)$ converge (fortement, donc faiblement) vers 0, on peut conclure que $Ty - y = 0$ par unicité de la limite faible.

2. En appliquant la question préliminaire, il existe une sous-suite (x_k) dans $\text{conv}\{S_n x\}$ qui converge vers y. Un tel x_k est de la forme $\sum \lambda_i S_{n_i} x$, et on peut l'écrire $A_k x$ avec $A_k = \sum \lambda_i S_{n_i}$.

3. Il suffit de le vérifier lorsque $A = T^p$ (le cas général s'ensuit par l'inégalité triangulaire). Mais dans ce cas on a $\|S_n A - S_n\| \leqslant 2p/n$ (série télescopique).

4. Soit (A_k) donné par la question 2, et $\varepsilon > 0$. Il existe k tel que $\|A_k x - y\| < \varepsilon$. On remarque qussi que $S_n y = y$ pour tout n (car $Ty = y$). On écrit ensuite

$$\|S_n x - y\| = \|S_n x - S_n y\| \leqslant \|S_n x - S_n A_k x\| + \|S_n(A_k x - y)\| \leqslant \|S_n x - S_n A_k x\| + \varepsilon$$

Par la question 3., la quantité $\|S_n x - S_n A_k x\|$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini (comme A_k est une combinaison convexe des S_n, c'est aussi une combinaison convexe des T^n).

5. P est linéaire comme limite d'application linéaires. De plus, pour tout $x \in X$, $\|S_n x\| \leqslant \|x\|$ donc $\|Px\| \leqslant \|x\|$, et P est continue de norme $\leqslant 1$. On a vu à la question 1 que $TPx = Px$, ce qui implque que $S_n P = P$ et donc $P^2 = P$. Enfin, on remarque que $P(X) = \ker(T - \text{Id})$, l'ensemble des points fixes de T (l'inclusion directe a été vue à la question 1, et l'autre est évidente).

6. Il faut déterminer $\ker(T - \text{Id})$. Soit $f \in L^2([0,1])$, on la décompose en série de Fourier

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \alpha_n \exp(2i\pi nx).$$

On a alors

$$(Tf)(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \alpha_n \exp(2i\pi n\theta) \exp(2i\pi nx).$$

Ainsi $f = Tf$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $\alpha_n = \alpha_n \exp(2i\pi n\theta)$. Comme θ est irrationnel, cela implique que $\alpha_n = 0$ si $n \neq 0$, et f est nécessairement constante.

Ainsi P est la projection orthogonale sur le sous-espace (de dimension 1) des fonctions constantes, et pour tout $f \in L^2$, la suite $(S_n f)$ converge en norme vers la fonction constante égale à $\int_0^1 f(x)dx$.