ENS Lyon
M1 Analyse avancée

Mathématiques

Examen du 9 novembre 2011
Durée : 2 heures.

La consultation des notes de cours est autorisée.

Exercice 1

Soient X et Y des espaces vectoriels topologiques localement convexes. Soit $(p_\alpha)_{\alpha\in A}$ (respectivement $(q_\beta)_{\beta\in B}$) une famille séparante de semi-normes induisant la topologie de X (respectivement de Y). Soit $T : X \to Y$ une application linéaire. Montrer que T est continue si et seulement si, pour tout $\beta \in B$, il existe un ensemble fini $I \subset A$ et une constante $C > 0$ tels que, pour tout $x \in X$,

$$q_\beta(Tx) \leqslant C \sum_{\alpha\in I} p_\alpha(x).$$

Exercice 2

Soit $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, et p' l'exposant conjugué de p. Soit (α_n) une suite de nombres réels telle que, pour tout $(x_n) \in \ell_p$, on ait $\sum |\alpha_n x_n| < +\infty$. Monter que $(\alpha_n) \in \ell_{p'}$.

Exercice 3

1. Montrer qu'il existe $\Lambda \in (\ell_\infty)^*$ vérifiant, pour tout $x = (x_n) \in \ell_\infty$,
$$\liminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \Lambda(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} x_n. \tag{1}$$
2. Montrer qu'il existe $\Lambda \in (\ell_\infty)^*$ qui vérifie (1) et qui est invariante par décalage, c'est-à-dire telle que, pour tout $(x_n) \in \ell_\infty$,
$$\Lambda(x_0, x_1, x_2, \dots) = \Lambda(x_1, x_2, x_3, \dots).$$
Indication. On pourra introduire le sous-espace $M \subset \ell_\infty$ des suites qui convergent en moyenne de Cesàro, i.e. telles que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(x_0 + \cdots + x_{n-1})$ existe.

Exercice 4

Soit E un sous-espace fermé de $L^2([0,1])$. On suppose que $E \subset L^\infty([0,1])$.

1. Montrer (à l'aide du théorème du graphe fermé) qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $f \in E$, on ait
$$\|f\|_{L^\infty} \leqslant C\|f\|_{L^2}.$$
2. *(Question plus difficile).* En déduire que E est de dimension finie.

Exercice 5

Question préliminaire. Soit X un espace de Banach, et (x_n) une suite de X qui converge faiblement vers x. Montrer qu'il existe une suite (y_n) d'éléments de $\mathrm{conv}\{x_n \,:\, x \in \mathbf{N}\}$ qui converge fortement vers x.

Dans cet exercice, on se donne X un espace de Banach réflexif, $T : X \to X$ une application linéaire continue vérifiant $\|T\| \leqslant 1$. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} T^k,$$

avec la convention que $T^0 = \mathrm{Id}$.

1. Montrer que pour tout $x \in X$, il existe une sous-suite $(S_{n_k} x)$ de la suite $(S_n x)$ qui converge faiblement ; on note y sa limite. Montrer que $\lim\limits_{k \to \infty} \|T S_{n_k} - S_{n_k}\| = 0$, et en déduire que $Ty = y$.
2. Montrer ensuite qu'il existe une sous-suite (A_k), avec $A_k \in \mathrm{conv}\{S_n \,:\, n \in \mathbf{N}\}$ telle que $(A_k x)$ converge fortement vers y.
3. Montrer que pour tout $A \in \mathrm{conv}\{T^n \,:\, n \in \mathbf{N}\}$, on a $\lim\limits_{n \to \infty} S_n A x - S_n x = 0$.
4. En déduire que pout tout $x \in X$, la suite $(S_n x)$ converge fortement.
5. Pour $x \in X$, on pose $P(x) = \lim\limits_{n \to \infty} S_n x$. Montrer que P est une application linéaire continue, qui est un projecteur (c'est-à-dire qu'elle vérifie $P^2 = P$). Déterminer l'image de P.
6. Application : on prend $X = L^2([0,1])$, et T l'application linéaire définie par

$$(Tf)(x) = f(x + \theta \mod 1)$$

où θ est un nombre irrationnel. Pour $f \in X$, quelle est la limite de la suite $S_n f$?