Introduction aux probabilités

Examen du 13 janvier 2011. Durée : 3 heures.

La consultation des notes de cours est autorisée.

Les questions marquées du signe ♠ sont des questions d'analyse et auront donc un poids quasi-nul dans le barème. N'hésitez pas à admettre ces résultats. Les questions marquées du signe ★ sont plus difficiles.

Exercice 1

On se donne un couple de variables aléatoires discrètes (X,Y) à valeurs dans $\{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$ et de loi définie comme suit: pour tous i,j dans $\{1,2,3\}$,

$$P(X = i \text{ et } Y = j) = \frac{i+j}{36}.$$

1. Vérifier que cela définit bien une loi de probabilité.
2. Déterminer la loi de X et celle de Y.
3. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 2

Soit $(X_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $\{-1,1\}$. On pose $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$.

Dans les questions 1 à 4, on ne considère simultanément qu'une suite finie $(X_1,\ldots,X_n)$ qui peut être définie sur un espace de probabilité disrcet. Dans la question 5, on considère une suite infinie, définie sur l'espace $\{-1,1\}^{\mathbf{N}}$, et on affecte des probabilités à certains événements comme précisé dans le cours.

1. Montrer que pour tous réels positifs a, x, on a
$$\mathbf{P}(S_n \geqslant a) \leqslant \exp(-ax)\mathbf{E}\exp(xS_n).$$
2. Donner une expression plus simple de $\mathbf{E}\exp(xS_n)$.
3. (♠) Montrer que l'inégalité $\operatorname{ch} x \leqslant \exp(x^2/2)$ est vraie pour tout nombre réel x.
4. En déduire que pour tout réel positif a, on a
$$\mathbf{P}(S_n \geqslant a) \leqslant \exp\left(-\frac{a^2}{2n}\right).$$
5. Montrer que pour $c > \sqrt{2}$, on a
$$\mathbf{P}\left(\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{n\log n}} > c\right) = 0.$$
Indication : *On pourra inclure cet événement dans la réunion d'une suite d'événements d'envergure finie dont la somme des probabilités est arbitrairement petite.*

Exercice 3

Dans cette exercice, on dira qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbf{N}$ suit une loi géométrique de paramètre p $(0 < p < 1)$ si, pour tout $k \in \mathbf{N}$,

$$\mathbf{P}(X = k) = p^k(1-p)$$

(la convention choisie est différente de celle du cours). Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de loi géométrique de paramètres respectifs p et q. On définit deux nouvelles variables aléatoires U et V en posant $U = \min(X,Y)$ et $V = X - Y$.

1. Quelle est la loi suivie par U ?
2. Montrer que U et V sont indépendantes.
3. (★) Réciproquement, soit deux variables aléatoires indépendantes X et Y à valeurs dans $\mathbf{N}$, telles que chacun des nombres $\mathbf{P}(X = 0), \mathbf{P}(X = 1), \mathbf{P}(Y = 0), \mathbf{P}(Y = 1)$ soit strictement positif, et telles que les variables aléatoires $\min(X,Y)$ et $X - Y$ soient indépendantes. Montrer que X et Y suivent des lois géométriques.

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire telle que $\mathbf{E}|X| < +\infty$. Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi que X ; on note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Le but de l'exercice est de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\left|\frac{S_n}{n} - m\right| = 0.$$

1. On suppose dans un premier temps que $\mathbf{E}(X^2) < +\infty$. Montrer que $\mathbf{E}|S_n/n - \mathbf{E}X| \leqslant \sqrt{\mathbf{Var}(S_n/n - \mathbf{E}X)}$ et en déduire le résultat dans ce cas.

2. On se place dans le cas général. Montrer que
$$\limsup_{n\to\infty} \mathbf{E}\left|\frac{S_n}{n} - \mathbf{E}X\right| \leqslant \mathbf{E}|X - \mathbf{E}X|.$$

3. Si X est une variable aléatoire telle que $\mathbf{E}|X| < +\infty$, montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une décomposition $X = Y + Z$ avec $\mathbf{E}|Z - \mathbf{E}Z| \leqslant \varepsilon$, $\mathbf{E}(Y^2) < +\infty$ et $|\mathbf{E}X - \mathbf{E}Y| \leqslant \varepsilon$.

4. En déduire le résultat.

Exercice 5

Partie A

Soit n un entier non nul. On appelle pont de longueur $2n$ un $2n$-uplet $(x_1, \ldots, x_{2n}) \in \{-1, 1\}^{2n}$ vérifiant $x_1 + \cdots + x_{2n} = 0$. Le nombre de retours en 0 d'un pont $P = (x_1, \ldots, x_{2n})$ est défini comme

$$N(P) = \mathrm{card}\{i \in \{1, \ldots, 2n\} \text{ t.q. } x_1 + \cdots + x_i = 0\}.$$

1. Quel est le cardinal de l'ensemble $\mathscr{P}_n$ des ponts de longueur $2n$?

2. Soit $P = (x_1, \ldots, x_{2n})$ un pont de longueur de $2n$ choisi aléatoirement selon la loi uniforme sur $\mathscr{P}_n$. Quelle est la probabilité qu'il vérifie la condition $x_1 + \cdots + x_{2k} = 0$, lorsque k est un entier fixé ? Montrer l'égalité
$$\mathbf{E}N(P) = \frac{1}{\binom{2n}{n}} \sum_{k=1}^{n} \binom{2k}{k}\binom{2n-2k}{n-k}.$$
On notera α_n le nombre $\mathbf{E}N(P)$.

3. (♠) Démontrer l'égalité
$$\frac{1}{\sqrt{1-4z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} z^n \qquad \text{si } |z| < 1/4.$$

4. En déduire que
$$\alpha_n = \frac{4^n}{\binom{2n}{n}} - 1.$$

Partie B

On considère le jeu suivant. Un paquet comporte $2n$ cartes (n cartes rouges et n cartes noires). Les cartes sont retournées une à une et le joueur doit en annoncer la couleur («Rouge» ou «Noir») avant qu'on la retourne. Chaque annonce correcte rapporte 1 point.

1. Un enfant annonce «Rouge» ou «Noir» avec probabilité 1/2, et ses $2n$ choix sont indépendants. Soit E_n le nombre de points marqués par l'enfant. Quelles sont l'espérance et la variance de E_n ?

2. (★) On suppose que le jeu est mélangé aléatoirement selon la loi uniforme sur le groupe des permutations à $2n$ éléments. Quelle stratégie proposez-vous pour maximiser l'espérance du nombre de points marqués ? Calculer cette espérance en fonction de α_n et donner une valeur approchée pour $n = 26$.