Université de la Réunion — Mathématiques

M1 Théorie des Opérateurs

Devoir Maison : corrigé

Exercice 1

Comme S^* est une isométrie, on a $\|S^*\| = 1 = \|S\|$, donc $\|S+S^*\| \leqslant \|S\|+\|S^*\| = 2$. Réciproquement, soit le vecteur $x_n = e_0+\cdots+e_{n-1}$, où (e_n) désigne la base canonique de $\ell^2(\mathbf{N})$. On vérifie que $\|x_n\| = \sqrt{n}$, et que

$$(S+S^*)(x_n) = e_0 + 2\sum_{k=1}^{n_1} e_k + e_{n-1} + e_n,$$

donc $\|(S+S^*)(x_n)\| = \sqrt{3+4(n-2)} = \sqrt{4n-5}$. Par ailleurs, on a pour tout vecteur non nul $y \in H$,

$$\|(S+S^*)\| \geqslant \frac{\|(S+S^*)(y)\|}{\|y\|}.$$

En prenant $y = x_n$ en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $\|S+S^*\| \geqslant 2$, et donc $\|S+S^*\| = 2$.

Exercice 2 (unicité de la racine carrée)

1. B' commute avec A (car $B'A = B'(B')^2 = (B')^2B' = AB'$), et donc B' commute avec tout polynôme en A, et aussi avec toute limite de suite de polynômes en A. Comme B est la racine carrée de A construite par le calcul fonctionnel, c'est par définition la limite d'une suite de polynômes en A, et donc B' commute avec B.
2. On construit C et C' en appliquant le calcul fonctionnel continu respectivement à B et B' (comme ces opérateurs sont auto-adjoint positifs, leurs spectres sont inclus dans $\mathbf{R}^+$, et donc la fonction $\sqrt{\cdot}$ y est définie et continue). Soit $x \in H$ et $y = (B-B')x$. On calcule

$$\begin{aligned}
\|C(y)\|^2 + \|C'(y)\|^2 &= \langle Cy, Cy\rangle + \langle C'y, C'y\rangle \\
&= \langle C^2y, y\rangle + \langle C'^2y, y\rangle \\
&= \langle By, y\rangle + \langle B'y, y\rangle \\
&= \langle B^2x - BB'x, y\rangle + \langle B'Bx - B'^2x, y\rangle \\
&= \langle Ax, y\rangle - \langle BB'x, y\rangle + \langle B'Bx, y\rangle - \langle Ax, y\rangle \\
&= 0
\end{aligned}$$

   car $BB' = B'B$.
3. On déduit de la question précédente que $C(y) = C'(y) = 0$, d'où on tire (car $y = (B-B')x$) que $CB = CB'$ et $C'B = C'B'$. Finalement, on calcule pour tout $x \in H$,

$$\begin{aligned}
\|(B-B')(x)\|^2 &= \langle Bx - B'x, Bx - B'x\rangle \\
&= \langle Bx - B'x, C^2x\rangle - \langle Bx - B'x, C'^2x\rangle \\
&= \langle CBx - CB'x, Cx\rangle - \langle C'Bx - C'B'x, C'x\rangle \\
&= 0 - 0
\end{aligned}$$

   et donc $(B-B')x = 0$ pour tout x, i.e. $B = B'$. La racine carrée est donc unique.

Exercice 3

1. Soit $N \in \mathbf{N}$ tel que $\alpha := \|A^N\| < 1$. On calcule $\sum \|A^n x\|$ en groupant les termes par paquets de N.

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbf{N}} \|A^n x\| &= \sum_{k\in\mathbf{N}} \sum_{i=0}^{N-1} \|A^{kN+i}x\| \\
&\leqslant \sum_{k\in\mathbf{N}} \sum_{i=0}^{N-1} \|A^i\| \cdot \|A^{kN}\| \cdot \|x\| \\
&\leqslant \left(\sum_{i=0}^{N-1} \|A^i\|\right) \|x\| \sum_{k\in\mathbf{N}} \alpha^k \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

   car $|\alpha| < 1$. On a donc prouvé l'implication (a) $\Longrightarrow$ (b).

2. Supposons (b). Soit $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $|\lambda| \geqslant 1$ et supposons par l'absurde que $A - \lambda\mathrm{Id}$ n'est pas injectif. Alors on peut trouver un vecteur non nul $x \in H$ tel que $Ax = \lambda x$, et donc $A^n x = \lambda^n x$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. On en tire que $\|A^n x\| = |\lambda^n| \cdot \|x\| \geqslant \|x\|$, et donc la série $\sum \|A^n x\|$ diverge.

3. Supposons (b) et soit $\lambda \in \mathbf{C}$ tel que $|\lambda| \geqslant 1$. Pour $u \in H$ et $x_0 \in H$, on introduit la suite (x_k) définie par récurrence par la formule

$$x_{k+1} = \frac{1}{\lambda}(A(x_k) + u). \tag{1}$$

   On vérifie par récurrence que l'on a

$$x_{k+1} = \frac{1}{\lambda^{k+1}} A^{k+1}(x_0) + \sum_{j=0}^{k} \frac{1}{\lambda^{j+1}} A^j u. \tag{2}$$

   On sait que la série $\sum \|A^n u\|$ converge ; ceci implique d'une part que son terme général $A^n x$ tend vers 0, d'autre part que la série $\sum \frac{1}{\lambda^{n+1}} A^n u$ converge normalement. En passant à la limite dans (2), on voitt donc que la suite (x_k) converge ; soit x sa limite. En passant à la limite dans (1), on obtient que $x = \frac{1}{\lambda}(Ax + u)$, donc $u = (A - \lambda\mathrm{Id})(-x)$. Ainsi tout vecteur u est dans l'image de $A - \lambda\mathrm{Id}$, donc $A - \lambda\mathrm{Id}$ est surjectif.

4. Supposons (b). Les deux questions précédentes impliquent que si $|\lambda| \geqslant 1$, $A - \lambda\mathrm{Id}$ est bijectif et donc inversible d'après le théorème de l'opérateur inverse. Donc le spectre de A est contenu dans $\{\lambda \in \mathbf{C}, |\lambda| < 1\}$. Soit $r(A)$ le rayon spectral de A :

$$r(A) = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|.$$

   Comme $\sigma(A)$ est compact, le supremum est atteint, ce qui permet de conclure que $r(A) < 1$. Mais par ailleurs on sait que

$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n}.$$

   Ainsi il existe un entier N tel que $\|A^N\|^{1/N} < 1$, ce qui prouve (a).

Question bonus

Soit (α_n) une suite de réels vérifiant $0 < \alpha_n \leqslant 1$, $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 1$ et $\prod_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 0$ (par exemple on peut prendre $\alpha_n = 1 - 1/2n$). On définit un opérateur T sur $\ell_2(\mathbf{N})$ par $T(e_0) = 0$ et $T(e_n) = \alpha_n e_{n-1}$ pour $n \geqslant 1$. Il est facile de vérifier que $\|T\| \leqslant \sup |\alpha_n| \leqslant 1$, et donc $\|T^n\| \leqslant 1$ pour tout n. De plus, pour tout entiers N, k, on a

$$\|T^N\| \geqslant \|T^N e_k\| = |\alpha_k \alpha_{k-1} \cdots \alpha_{k-N+1}|$$

En faisant tendre k vers $+\infty$, on obtient $\|T^N\| \geqslant 1$, donc $\|T^N\| = 1$. Par ailleurs, pour toute suite $(x_n) \in H$,

$$\|T^n x\|^2 \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} |x_k|^2$$

Cette quantité tend vers 0 quand n tend vers l'infini (c'est le reste d'une série convergente). L'opérateur T a donc bien les propriétés voulues.

Exercice 4 (spectre d'une perturbation compacte)

Soit $\lambda \in \sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$. Alors l'opérateur $A - \lambda\mathrm{Id}$ est injectif mais n'est pas inversible. Soit K un opérateur compact et supposons par l'absurde que $A + K - \lambda\mathrm{Id}$ est inversible. On écrit

$$A - \lambda\mathrm{Id} = A + K - \lambda\mathrm{Id} - K = (A + K - \lambda\mathrm{Id})(\mathrm{Id} - K')$$

avec $K' = (A + K - \lambda\mathrm{Id})^{-1}K$. L'opérateur K' est compact (car l'ensemble des opérateurs compacts est un idéal). Comme $A - \lambda\mathrm{Id}$ est injectif, l'équation précédente montre que $\mathrm{Id} - K'$ est injectif. Mais K' étant compact, un résultat du cours implique que $\mathrm{Id} - K'$ est surjectif, donc inversible par le théorème de l'opérateur inverse. Mais alors $A - \lambda\mathrm{Id}$ serait inversible comme produit d'opérateurs inversibles, ce qui est absurde. Ainsi $\lambda \in \sigma(A + K)$.