Université de la Réunion — Mathématiques
M1 Théorie des Opérateurs

Examen : correction

Exercice 1 (question de cours)

Soit H un espace de Hilbert, S un opérateur sur H et T un opérateur compact sur H. Montrer que les opérateurs ST et TS sont compacts.

Correction : Notons B_H la boule-unité fermée de H, alors

- $TS(B_H) \subset T(\|S\|B_H) = \|S\|T(B_H)$. Or $T(B_H)$ est d'adhérence compacte par hypothèse, donc $TS(B_H)$ aussi et l'opérateur TS est compact.
- $ST(B_H) \subset S(\overline{T(B_H)})$ qui est compact (image continue d'un compact), et donc $ST(B_H)$ est d'adhérence compacte, et l'opérateur ST est compact.

Exercice 2

Soit H un espace de Hilbert, $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur compact et (e_n) une base orthonormale de H. Montrer que (Te_n) tend vers 0.

Correction : Sinon, on pourrait (pour un certain $\varepsilon > 0$) extraire de (e_n) une sous-suite $(e_{\sigma(n)})$ tele que $\|Te_{\sigma(n)}\| > \varepsilon$ pour tout n. Mais comme T est compact, on peut extraire de $(e_{\sigma(n)})$ une sous-suite (notée $(e_{\tau(n)})$ convergente. Si on note x sa limite, on a $\|x\| \geqslant \varepsilon$. Mais pour tout $y \in H$,

$$\langle x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Te_{\tau(n)}, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle e_{\tau(n)}, T^*y\rangle = 0$$

(La dernière égalité vient du fait que pour tout vecteur $z \in H$, la série $\sum |\langle e_n, z\rangle|^2$ converge donc son terme général tend vers 0). En choisissant $y = x$, on obtient $x = 0$, ce qui est une contradiction.

Exercice 3

Soit H un espace de Hilbert complexe et A, B deux opérateurs sur H. Montrer que les opérateurs AB et BA ont même rayon spectral.

Correction : On remarque que $(AB)^n = A(BA)^{n-1}B$, donc

$$\|(AB)^n\|^{1/n} \leqslant \|A\|^{1/n}\|(BA)^{n-1}\|^{1/n}\|B\|^{1/n}.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient $r(AB) \leqslant r(BA)$. On prouve l'autre inégalité en échangeant les rôles de A et B.

Exercice 4

Soit (e_n) une base orthonormale d'un espace de Hilbert H et U l'opérateur défini par $U(e_n) = e_{n+1}$. Montrer que $\|U + \mathrm{Id}\| = 2$.

Correction : Il est clair que U est une isométrie, donc $\|U + \mathrm{Id}\| \leqslant \|S\| + \|\mathrm{Id}\| = 2$. Soit maintenant x_n le vecteur donc les coordonnées dans la base (e_n) sont données par

$$x_n = (\underbrace{1, 1, \dots, 1, 1}_{n \text{ termes}}, 0, 0, 0, 0 \dots)$$

On calcule $\|x_n\| = \sqrt{n}$ et $\|Ux_n + x_n\| = \sqrt{4(n-1)+2}$. Comme $\|U + \mathrm{Id}\| \geqslant \|Ux_n + x_n\|/\|x_n\|$, on obtient la minoration $\|U + \mathrm{Id}\| \geqslant 2$ en faisant tendre n vers l'infini.

Exercice 5

Soit H un espace de Hilbert complexe, et $A \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur inversible tel que $\|A\| \leqslant 1$ et $\|A^{-1}\| \leqslant 1$. Montrer que $\sigma(A) \subset \mathbf{T}$, où $\mathbf{T} = \{\lambda \in \mathbf{C} \text{ t.q. } |\lambda| = 1\}$, et que A est unitaire.

Correction : Soit $\lambda \in \mathbf{C}^*$, on a l'équivalence

$$A - \lambda \mathrm{Id} \text{ inversible} \iff \mathrm{Id} - \lambda A^{-1} \text{ inversible} \iff A^{-1} - \frac{1}{\lambda}\mathrm{Id} \text{ inversible.}$$

Donc $\lambda \in \sigma(A) \iff \lambda^{-1} \in \sigma(A^{-1})$. Comme $\|A\| \leqslant 1$, $\sigma(A)$ est inclus dans le disque-unité fermé. Mais c'est vrai aussi pour A^{-1}, et la remarque précédente implique que $\sigma(A) \subset \mathbf{T}$.

Pour tout $x \in H$, on a $\|Ax\| \leqslant \|A\| \cdot \|x\| \leqslant \|x\| = \|A^{-1}(Ax)\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|Ax\| \leqslant \|Ax\|$, d'où on tire $\|Ax\| = \|x\|$. On calcule ensuite

$$\langle A^*Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \|Ax\|^2 = \|x\|^2 = \langle x, x\rangle$$

et donc $\langle (A^*A - \mathrm{Id})x, x\rangle = 0$ pour tout x. Comme $A^*A - \mathrm{Id}$ est auto-adjoint, cela implique que $A^*A - \mathrm{Id} = 0$, donc $A^*A = \mathrm{Id}$ et $A^* = A^{-1}$. Ainsi A est unitaire.

Exercice 6

Soit H un espace de Hilbert et $A \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur normal. Montrer que A est inversible si et seulement si il existe une constante $c > 0$ telle que $\|Ax\| \geqslant c\|x\|$ pour tout $x \in H$.

Correction : Si A est inversible, alors $\|x\| = \|A^{-1}Ax\| \leqslant \|A^{-1}\| \cdot \|Ax\|$ donc on peut choisir $c = \|A^{-1}\|$.

Supposons que $\|Ax\| \geqslant c\|x\|$ pour tout $x \in H$. Alors il est facile de voir que $\ker A = \{0\}$. Comme A est normal, $\ker A = \ker A^* = (\operatorname{im} A)^\perp$. Donc $(\operatorname{im} A)^\perp = \{0\}$, c'est-à-dire que A est d'image dense. Pour montrer qu'elle est fermée, soit (Ax_n) une suite de Cauchy dans $\operatorname{im} A$. L'inégalié supposée implique quet (x_n) est de Cauchy, donc converge vers x. Mais alors (Ax_n) converge vers Ax, ce qui montrer que A est d'image fermée. Finalement A est surjectif, donc bijectif, et donc inversible par le théorème de l'opérateur inverse.