Théorie des Opérateurs [1]

M1 Mathématiques, Université de la Réunion

Guillaume AUBRUN

1. Ce cours est très largement inspiré de l'excellent livre de John Conway, *A Course in Functional Analysis.*
Pour toute question ou remarque, écrivez-moi à l'adresse : aubrun@math.univ-lyon1.fr

Chapitre 0

Rappels sur les espaces de Hilbert

Tout au long du cours, on travaillera sur un corps $\mathbf{K}$, qui sera soit $\mathbf{R}$ soit $\mathbf{C}$.

Définition 0.1 *Un* ***produit scalaire*** *sur un espace vectoriel H est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vérifiant*
- *Pour tout $h \in H$, l'application $g \mapsto \langle g, h \rangle$ est linéaire.*
- *Pour tous $g, h \in H$, $\langle g, h \rangle = \overline{\langle h, g \rangle}$.*
- *Pour tout $g \in H \setminus \{0\}$, $\langle g, g \rangle > 0$.*

On note alors $\|g\| = \sqrt{\langle g, g \rangle}$ et on vérifie que c'est une norme sur H. Un ***espace de Hilbert*** *est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, qui est de plus complet pour la norme $\| \cdot \|$. Tous les espaces de Hilbert que nous considérerons seront supposés* ***séparables****, c'est-à-dire admettant un sous-ensemble dénombrable dense.*

Une inégalité fondamentale est **l'inégalité de Cauchy–Schwarz**

$$|\langle g, h \rangle| \leqslant \|g\| \cdot \|h\|.$$

On en déduit immédiatement la formule suivante :

$$\|g\| = \sup_{h \in H, \|h\| \leqslant 1} |\langle g, h \rangle|. \tag{1}$$

Définition 0.2 *Si $g, h \in H$, on dit que g et h sont* ***orthogonaux****, et on écrit $g \perp h$ si $\langle g, h \rangle = 0$. Si M est une partie de H, l'****orthogonal*** *de M est défini par*

$$M^\perp = \{h \in H \text{ t.q. } \forall g \in H, h \perp g\}.$$

La remarque suivante est souvent utile : un sous-espace $M \subset H$ est dense si et seulement si $M^\perp = \{0\}$. De plus, si M est un sous-espace fermé, alors H se décompose en somme directe $H = M \oplus M^\perp$.
On peut énoncer le **théorème de Pythagore** : si $f_1, \ldots, f_n \in H$ sont deux à deux orthogonaux, alors

$$\|f_1 + \cdots + f_n\|^2 = \|f_1\|^2 + \cdots + \|f_n\|^2.$$

Une identité à retenir est l'**identité du parallélogramme** : si $f, g \in H$,

$$\|f + g\|^2 + \|f - g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$$

Si $M \subset H$ est un sous-espace fermé, on peut définir la **projection orthogonale** sur M, notée P_M, de la manière suivante : pour $h \in H$, $P_M h$ est l'unique élément de M tel que $h - P_M h \perp M$. Alors P_M est une application linéaire telle que $P_M^2 = P_M$, $\|P_M h\| \leqslant \|h\|$ pour tout $h \in H$, $\ker P_M = M^\perp$ et $\operatorname{Im} P_M = M$.

Définition 0.3 *Une famille $(e_i)_{i \in I}$ est une* ***base orthonormale*** *d'un espace de Hilbert H si*
- *$\|e_i\| = 1$.*
- *L'espace engendré $\operatorname{Vect}\{e_i\}$ est dense dans H*
- *$e_i \perp e_j$ pour $i \neq j$.*

Tout espace de Hilbert admet une base orthonormale, qui est finie si et seulement si l'espace est de dimension finie.

Les formes linéaires continues sur un espace de Hilbert sont particulièrement simples à décrire

Théorème 0.4 (Théorème de représentation de Riesz) *Soit ℓ une forme linéaire continue sur un espace de Hilbert H. Alors il existe un (unique) vecteur $y_\ell \in H$ tel que, pour tout $x \in H$*

$$\ell(x) = \langle x, y_\ell \rangle.$$

Enfin, voici une différence fondamentale entre $\mathbf{K}^n$ et les espaces de Hilbert de dimension infinie.

Théorème 0.5 *Soit H un espace de Hilbert et B_H sa boule-unité. Alors B_H est compacte si et seulement si H est de dimension finie.*

Voici les principaux exemples d'espaces de Hilbert qu'il faut avoir en tête :

Exemple 0.6 *L'espace $\mathbf{K}^n$, muni du produit scalaire défini par*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

est un espace de Hilbert. La base canonique de $\mathbf{K}^n$ est une base orthonormale.

Exemple 0.7 *L'espace $\ell_2(\mathbf{N}) = \{(u_n)_{n\in\mathbf{N}} \text{ t.q. } \sum_{n\in\mathbf{N}} |u_n|^2 \text{ converge}\}$, muni du produit scalaire*

$$\langle u, v \rangle = \sum_{n\in\mathbf{N}} u_n \overline{v_n}.$$

Pour $k \in \mathbf{N}$, on note e_k la suite dont tous les termes sont nuls, à l'exception du k-ème qui vaut 1. Alors $(e_k)_{k\in\mathbf{N}}$ est une base orthonormale de $\ell_2(\mathbf{N})$.

On peut définir de manière identique l'espace $\ell_2(\mathbf{Z})$ des suites de carré sommables indexées par $\mathbf{Z}$.

Exemple 0.8 *Si (X, Ω, μ) est un espace mesuré (par exemple : un intervalle de $\mathbf{R}$, avec la mesure de Lebesgue), l'espace*

$$L^2(X, \Omega, \mu) = \left\{ f : X \to \mathbf{K} \text{ t.q. } \int_X |f(x)|^2 d\mu(x) < +\infty \right\} / \sim$$

est l'espace des classes d'équivalences de fonctions de carré intégrable, où $\sim$ est la relation d'équivalence définie par

$$f \sim g \iff f = g \quad \mu - \text{p.p.}$$

C'est un espace de Hilbert quand on le munit du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu(x).$$

Si $\mathbf{K} = \mathbf{C}$, une base orthonormale de $L^2([0,1], dx)$ est donnée par $(e_n)_{n\in\mathbf{Z}}$, où e_n est la fonction

$$e_n(x) = \exp(2\pi i n x).$$

On retrouve ainsi la théorie des séries de Fourier.

Chapitre 1

Propriétés élémentaires et premiers exemples

Nous étudierons les applications linéaires continues d'un espace de Hilbert H dans lui-même. Une grande partie des théorèmes est également valable pour les applications linéaires continues entre deux espaces de Hilbert H et K ; mais nous n'en parlerons pas pour plus de concision.

Proposition 1.1 *Soit H un espace de Hilbert et $A : H \to H$ une application linéaire. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *A est continue.*
2. *A est continue en 0.*
3. *Il existe $x \in H$ tel que A est continue en x.*
4. *Il existe une constante $c > 0$ telle que $\|Ah\| \leqslant c\|h\|$ pour tout $h \in H$.*

Définition 1.2 *On appelle **opérateur** sur H une application linéaire continue de H dans H. On note $\mathscr{L}(H)$ l'ensemble des opérateurs sur H. Si $A \in \mathscr{L}(H)$, on définit sa **norme opérateur** par*

$$\|A\| = \sup\{\|Ah\| : h \in H, \|h\| \leqslant 1\}.$$

Proposition 1.3 *Voici quelques propriétés de la norme opérateur.*

1. *Si $A \in \mathscr{L}(H)$, alors $\|A\| = 0$ si et seulement si $A = 0$.*
2. *Si $A, B \in \mathscr{L}(H)$, alors $A + B \in \mathscr{L}(H)$ et $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$.*
3. *Si $\alpha \in \mathbf{K}$ et $A \in \mathscr{L}(H)$, alors $\alpha A \in \mathscr{L}(H)$ et $\|\alpha A\| = |\alpha| \cdot \|A\|$.*
4. *Si $A, B \in \mathscr{L}(H)$, alors $AB \in \mathscr{L}(H)$ et $\|AB\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|$ (AB désigne la composition $A \circ B$).*

Les trois premiers points de la proposition précédente affirment que $\|\cdot\|$ définit une norme sur $\mathscr{L}(H)$.

Exemple 1.4 *Si H est de dimension finie n, toute application linéaire de H dans H est continue. Étant donnée une base $(e_1, \dots, e_n)$ de H, on peut identifier $A \in \mathscr{L}(H)$ à la matrice (a_{ij}) définie par $a_{ij} = \langle Ae_i, e_j \rangle$.*

Exemple 1.5 *Soit $H = \ell_2$ et $(e_1, e_2, \dots)$ sa base canonique. Si $A \in \mathscr{L}(H)$, on pose $\alpha_{ij} = \langle Ae_i, e_j \rangle$. La « matrice » (α_{ij}) représente A de la même façon qu'en dimension finie. Cependant, on ne connaît pas de formule permettant de calculer $\|A\|$ en fonction de sa représentation matricielle.*

Réciproquement, étant donné $(\alpha_{ij})_{i,j \in \mathbf{N}^*}$, une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un opérateur $A \in \mathscr{L}(H)$ tel que $\langle Ae_i, e_j \rangle = \alpha_{ij}$ est que

$$\sup_{n \in \mathbf{N}} \sup \left\{ \left| \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} x_i y_j \right| : |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \leqslant 1, |y_1|^2 + \cdots + |y_n|^2 \leqslant 1 \right\} < +\infty.$$

Exemple 1.6 *Un exemple d'opérateur est l'***opérateur de Volterra** *défini sur* $L^2[0,1]$ *par*

$$Vf(x) = \int_0^x f(y)dy.$$

Exemple 1.7 *Un autre exemple important d'opérateur est le* **shift** S *défini sur* $\ell^2(\mathbf{N})$ *par*

$$S(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = (0, \alpha_1, \alpha_2, \dots).$$

On a $\|S\| = 1$.

Exemple 1.8 *Soit* (X, Ω, μ) *un espace mesuré* σ*-fini et* $H = L^2(\mu)$. *Si* $\varphi \in L^\infty(\mu)$. *On peut définir un opérateur* $M_\varphi \in \mathscr{L}(H)$ *en posant* $M_\varphi f = \varphi f$, *et qu'on a alors* $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$.

Démonstration — On rappelle que la norme $\|\varphi\|_\infty$ est définie comme le supremum essentiel de φ

$$\|\varphi\|_\infty = \inf\{c > 0 \text{ t.q. } \mu(|\varphi| > c) = 0\}.$$

On peut, quitte à modifier φ sur un ensemble de mesure nulle, supposer que $|\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\|_\infty$ pour tout $x \in X$. Pour $f \in L^2(\mu)$, on a alors

$$\|M_\varphi f\|^2 = \int |\varphi f|^2 d\mu \leqslant \|\varphi\|_\infty^2 \int |f|^2 d\mu \leqslant \|\varphi\|_\infty^2 \cdot \|f\|^2,$$

ce qui implique que $M_\varphi \in \mathscr{L}(H)$ et $\|M_\varphi\| \leqslant \|\varphi\|_\infty$

Pour montrer l'égalité, soit $\varepsilon > 0$. Alors, μ étant σ-finie, il existe $\Delta \in \Omega$ tel que $0 < \mu(\Delta) < \mu(\Omega)$ et $|\varphi(x)| \geqslant \|\varphi\|_\infty - \varepsilon$ pour tout $x \in \Delta$. On pose alors $f = (\mu(\Delta))^{-1/2}\mathbf{1}_\Delta$, alors $f \in L^2(\mu)$ et $\|f\|_2 = 1$. Ainsi

$$\|M_\varphi\|^2 \geqslant \|\varphi f\|_2^2 = (\mu(\Delta))^{-1} \int_\Delta |\varphi|^2 d\mu \geqslant (\|\varphi\|_\infty - \varepsilon)^2.$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient $\|M_\varphi\| \geqslant \|\varphi\|_\infty$. ■

L'opérateur M_φ défini ainsi s'appelle **opérateur de multiplication** et la fonction φ s'appelle le **symbole** de M_φ.

Exemple 1.9 *Soit* (X, Ω, μ) *un espace mesuré et* $k : X \times X \mapsto \mathbf{K}$ *une fonction* $\Omega \otimes \Omega$*-mesurable telle qu'il existe des constantes* c_1 *et* c_2 *vérifiant*

$$\int_X |k(x,y)| d\mu(y) \leqslant c_1 \quad \mu - p.p.$$

$$\int_X |k(x,y)| d\mu(x) \leqslant c_2 \quad \mu - p.p.$$

Alors l'application $K : L^2(\mu) \to L^2(\mu)$ *définie par*

$$(Kf)(x) = \int k(x,y) f(y) d\mu(y)$$

définit un opérateur sur $H = L^2(\mu)$, *et* $\|K\| \leqslant \sqrt{c_1 c_2}$.

Démonstration — Si $f \in L^2(\mu)$, on écrit

$$\begin{aligned}
|Kf(x)| &\leqslant \int |k(x,y)| \cdot |f(y)| d\mu(y) \\
&= \int |k(x,y)|^{1/2} \cdot |k(x,y)|^{1/2} \cdot |f(y)| d\mu(y) \\
&\overset{\text{C–S}}{\leqslant} \left(\int |k(x,y)| d\mu(y) \right)^{1/2} \left(\int |k(x,y)| \cdot |f(y)|^2 d\mu(y) \right)^{1/2} \\
&\leqslant \sqrt{c_1} \left(\int |k(x,y)| \cdot |f(y)|^2 d\mu(y) \right)^{1/2}
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\int |Kf(x)|^2 d\mu(x) &\leqslant c_1 \int\int |k(x,y)|\cdot|f(y)|^2 d\mu(x)d\mu(y)\\ &= c_1 \int |f(y)|^2 \left(\int |k(x,y)|d\mu(x)\right) d\mu(y)\\ &\leqslant c_1c_2\|f\|^2.\end{aligned}$$

Ceci montre que Kf est bien défini, que $Kf \in L^2(\mu)$, et que K est un opérateur sur $L^2(\mu)$ vérifiant $\|Kf\|^2 \leqslant c_1c_2\|f\|^2$, donc $\|K\| \leqslant \sqrt{c_1c_2}$. ■

L'opérateur K défini ainsi s'appelle un **opérateur intégral** et k s'appelle le **noyau** de K (attention à ne pas confondre avec $\ker K$ qui est un sous-espace de $L^2(\mu)$). L'opérateur de Volterra est un exemple d'opérateur intégral (quel est le noyau associé ?)

Exercices

Le nombre d'étoiles dans la marge correspond à la difficulté (qui est néanmoins une notion subjective).

(*) Très facile : un moyen de voir si on a compris le cours.

(**) Facile : application immédiate du cours.

(***) Moyen : demande un peu de réflexion mais reste proche du cours.

(****) Plus difficile : demande d'enchaîner plusieurs raisonnements.

(*****) Très difficile : demande une ou plusieurs idées originales.

Exercice 1.1 — Démontrer la proposition 1.1. (**)

Exercice 1.2 — Vérifier qu'on a les égalités suivantes : (**)

$$\begin{aligned}\|A\| &= \sup\{\|Ah\| : \|h\| = 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{\|Ah\|}{\|h\|} : h \neq 0\right\} \\ &= \inf\{c > 0 : \|Ah\| \leqslant c\|h\| \text{ pour tout } h \in H\}\end{aligned}$$

Exercice 1.3 — Démontrer la proposition 1.3. (*)

Exercice 1.4 — Soit H un espace de Hilbert et (e_n) une base orthonormale de H. Soit (α_n) une suite bornée de scalaires et $M = \sup |\alpha_n|$. Montrer qu'il existe un unique opérateur $A \in \mathscr{L}(H)$ tel que (**)

$$Ae_n = \alpha_n e_n$$

et montrer que $\|A\| = M$. On dit que l'opérateur A est **diagonal**.

Exercice 1.5 — Montrer que $\mathscr{L}(H)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|$. (***)

Exercice 1.6 — A quelle condition sur le symbole φ est-ce que l'opérateur de multiplication M_φ satisfait $M_\varphi^2 = M_\varphi$? (*)

Exercice 1.7 — Soit (X, Ω, μ) un espace mesuré σ-fini et k_1, k_2 deux noyaux satisfaisant aux conditions de l'exemple 1.9. On définit un noyau k par la formule (**)

$$k(x,y) = \int_X k_1(x,z)k_2(z,y)d\mu(z).$$

Montrer que k satisfait aussi les conditions de l'exemple 1.9. Si on note K, K_1, K_2 les opérateurs intégraux de noyaux respectifs k, k_1, k_2, montrer que $K = K_1K_2$. Qu'est-ce que cela vous rappelle ?

Exercice 1.8 — Soit (e_n) la base canonique de ℓ_2. Étant donné une matrice $(a_{ij})_{i,j\in\mathbf{N}}$, il n'est pas toujours vrai qu'il existe un opérateur $A \in \mathscr{L}(\ell_2)$ tel que $\langle Ae_i, e_j\rangle = a_{ij}$ (donner un exemple). On suppose que $a_{ij} \geqslant 0$ et qu'il existe des réels $p_i > 0$, et $\beta, \gamma > 0$ tels que (****)

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}p_i \leqslant \beta p_j$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}p_j \leqslant \gamma p_i$$

pour tous $i, j \in \mathbf{N}$. Montrer qu'alors il existe un opérateur $A \in \mathscr{L}(\ell_2)$ tel que $\langle Ae_i, e_j\rangle = a_{ij}$, et que $\|A\| \leqslant \sqrt{\beta\gamma}$.

Exercice 1.9 — La matrice de Hilbert est définie pour $i, j \in \mathbf{N}$ par $a_{ij} = (i + j + 1)^{-1}$. Montrer qu'il existe un opérateur $A \in \mathscr{L}(\ell_2)$ telle que $\langle Ae_i, e_j\rangle = a_{ij}$, et que $\|A\| \leqslant \pi$. (*****)

Chapitre 2

Autour du théorème de Baire

Le théorème de Baire est un outil fondamental lorsqu'on travaille en dimension infinie. Les résultats de ce chapitre n'ont rien de spécifique aux espaces de Hilbert et sont vrais dans n'importe quel espace de Banach. La propriété importante est ici la complétude.

Théorème 2.1 (Baire) *Soit X un espace métrique complet et $(U_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'ouverts denses de X. Alors $\bigcap U_n$ est dense dans X.*

De même, si $(F_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de fermés d'intérieur vide de X, alors $\bigcup F_n$ est d'intérieur vide dans X.

Démonstration — Soit $B_0 \subset X$ un ouvert non vide. Comme U_1 est dense, il existe une boule B_1, de centre x_1 et de rayon $r_1 \leqslant 1$ telle que $\operatorname{adh} B_1 \subset U_1 \cap B_0$. Ensuite, comme U_2 est dense, il existe une boule B_2, de centre x_2 et de rayon $r_2 \leqslant 1/2$ telle que $\operatorname{adh} B_2 \subset U_2 \cap B_1$. De proche en proche, on construit B_n, de centre x_n et de rayon $r_n \leqslant 1/n$, telle que $\operatorname{adh} B_n \subset U_n \cap B_{n-1}$. En particulier, la suite $(\operatorname{adh} B_n)$ est décroissante, et la suite (x_n) est de Cauchy donc converge ; soit x sa limite. Pour tout n, $x \in \operatorname{adh} B_n \subset U_n$, et donc $x \in \bigcap U_n$. Comme on a aussi $x \in B_0$, on a montré que l'ensemble $\bigcap U_n$ intersecte tout ouvert, donc il est dense.

La deuxième partie de l'énoncé découle de la première en passant au complémentaire. ∎

Théorème 2.2 (de l'application ouverte) *Si $T \in \mathscr{L}(H)$ est un opérateur surjectif, alors pour tout ouvert $U \subset H$, $T(U)$ est ouvert.*

Démonstration — Comme T est linéaire, il suffit de montrer que l'image de la boule-unité contient un voisinage de 0. Soit $B = B(0,1)$ la boule-unité ouverte de H. Comme T est surjectif, on peut écrire $T = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} \operatorname{adh}(nT(B))$. Par le théorème de Baire, il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $\operatorname{adh}(nT(B))$ est d'intérieur non vide. Soit $x \in H$ et $\varepsilon > 0$ tel que $\operatorname{adh}(nT(B)) \supset B(x,\varepsilon)$. On a aussi $\operatorname{adh}(nT(B)) \supset B(-x,\varepsilon)$, et donc $\operatorname{adh}(nT(B))$ étant convexe (exercice), $\operatorname{adh}(nT(B)) \supset B(0,\varepsilon)$ et donc $B \subset \operatorname{adh} T(\lambda B)$ avec $\lambda = n/\varepsilon$.

Montrons que cela implique que $B \subset T(2\lambda B)$. Soit $z \in B$; comme $z \in \operatorname{adh} T(\lambda B)$, il existe x_1 avec $\|x_1\| < \lambda$ et $\|z - Tx_1\| < \frac{1}{2}$. De même, comme $z - Tx_1 \in \operatorname{adh} T(\frac{\lambda}{2}B)$, il existe x_2 avec $\|x_2\| < \lambda/2$ et $\|z - Tx_1 - Tx_2\| < \frac{1}{4}$. On construit ainsi par récurrence une suite (x_k) vérifiant $\|x_k\| < \lambda/2^{k-1}$ et $\|z-(Tx_1+\cdots+Tx_k)\| < 1/2^k$. La série convergeant normalement, on peut poser $x = \sum x_k$, et $\|x\| < 2\lambda$, donc $x \in 2\lambda B$. Comme T est continue, on a $Tx = z$. Ainsi $z \in T(2\lambda B)$. Ceci conclut la preuve. ∎

Théorème 2.3 (de l'opérateur inverse) *Si $A \in \mathscr{L}(H)$ est un opérateur bijectif, alors A^{-1} est aussi un opérateur.*

Si H est un espace de Hilbert, on peut aussi munir $H \times H$ d'une structure d'espace de Hilbert à l'aide du produit scalaire

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2)\rangle := \langle x_1, x_2\rangle + \langle y_1, y_2\rangle.$$

Théorème 2.4 (du graphe fermé) *Le graphe d'une application linéaire $A : H \to H$ est la partie de $H \times H$ définie comme*

$$G(A) = \{(h, Ah) : h \in H\}.$$

Si $G(A)$ est fermé dans $H \times H$, alors A est continue.

Exercices

Exercice 2.1 — Soit $K \subset H$ un convexe. Montrer que l'intérieur de K et l'adhérence de K sont convexes. (*)

Exercice 2.2 — Démontrer le théorème de l'opérateur inverse. (**)

Exercice 2.3 — Démontrer le théorème du graphe fermé. (***)

Réciproquement, montrer que le graphe d'un opérateur est toujours fermé.

Exercice 2.4 — Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie, et $(e_i)_{i \in I}$ une famille génératrice de H (en tant qu'espace vectoriel). Montrer que I n'est pas dénombrable. (***)

Exercice 2.5 — Montrer qu'une suite (x_n) de H qui converge faiblement vers 0 (i.e., $\lim\langle x_n, y\rangle = 0$ pour tout $y \in H$) est bornée. (****)

Chapitre 3

L'adjoint d'un opérateur

Proposition-définition 3.1 *Soit H un espace de Hilbert et $A \in \mathscr{L}(H)$. Alors il existe un unique opérateur $A^* \in \mathscr{L}(H)$, appelé* ***adjoint*** *de H, qui vérifie la relation suivante : pour tous $x, y \in H$,*

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle.$$

De plus, on a $\|A\|_{op} = \|A^*\|_{op}$.

Démonstration — D'après l'inégalité de Cauchy–Schwarz et la définition de la norme opérateur, on a l'inégalité

$$|\langle Ax, y\rangle| \leqslant \|A\|_{op} \cdot \|x\| \cdot \|y\|.$$

Ainsi, l'application $\ell_y : x \mapsto \langle Ax, y\rangle$ est une forme linéaire continue sur H, et par le théorème de représentation de Riesz, il existe un unique élément dans H — notons-le $A^*(y)$ — tel que

$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle.$$

On vérifie facilement que pour tous $y, z \in H$ et $\lambda \in \mathbf{K}$, $A^*(y) + \lambda A^*(z)$ vérifie la propriété qui définit $A^*(y + \lambda z)$. Par unicité, $A^*(y) + \lambda A^*(z) = A^*(y + \lambda z)$, ce qui prouve que A^* est linéaire.
Enfin, on calcule la norme opérateur de A^*

$$\|A^*\|_{op} = \sup_{\|x\|\leqslant 1, \|y\|\leqslant 1} |\langle A^* x, y\rangle| = \sup_{\|x\|\leqslant 1, \|y\|\leqslant 1} |\langle y, A^* x\rangle| = \sup_{\|x\|\leqslant 1, \|y\|\leqslant 1} |\langle Ay, x\rangle| = \|A\|_{op}.$$

■

Proposition 3.2 *Soit $A, B \in \mathscr{L}(H)$ et $\alpha \in \mathbf{K}$. Alors*

1. $(\alpha A + B)^* = \overline{\alpha} A^* + B^*$.
2. $(AB)^* = B^* A^*$.
3. $(A^*)^* = A$.
4. *Si A est inversible d'inverse A^{-1}, alors A^* est inversible et $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.*

Rappelons que $A \in \mathscr{L}(H)$ est dit **inversible** s'il existe $B \in \mathscr{L}(H)$ tel que $AB = BA = \mathrm{Id}$. L'opérateur B est alors unique et on le note A^{-1}.

Proposition 3.3 *Si $A \in \mathscr{L}(H)$, alors $\|A\| = \|A^*\| = \|AA^*\|^{1/2}$.*

Démonstration — Pour $h \in H$ avec $\|h\| \leqslant 1$, on a

$$\|Ah\|^2 = \langle Ah, Ah\rangle = \langle A^* Ah, h\rangle \leqslant \|A^* Ah\| \cdot \|h\| \leqslant \|A^* A\| \leqslant \|A^*\| \cdot \|A\|,$$

et donc en prenant le supremum sur h, $\|A\|^2 \leqslant \|A^* A\| \leqslant \|A^*\| \cdot \|A\|$. En simplifiant par $\|A\|$, on obtient $\|A\| \leqslant \|A^*\|$. En remplaçant A par A^*, on obtient $\|A^*\| \leqslant \|A^{**}\| = \|A\|$. Ainsi $\|A\| = \|A^*\|$, et la chaîne d'inégalités est en fait une chaîne d'égalités. ■

Proposition 3.4 *Soit $S : \ell^2 \to \ell^2$ le shift défini par $S(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = (0, \alpha_1, \alpha_2, \dots)$, alors S^* est défini par $S^*(\alpha_1, \alpha_2, \dots) = (\alpha_2, \alpha_3, \dots)$.*

DÉMONSTRATION — Soit (α_n) et (β_n) dans ℓ^2. Alors

$$\begin{aligned}
\langle S^*(\alpha_n), (\beta_n)\rangle &= \langle(\alpha_n), S(\beta_n)\rangle \\
&= \langle(\alpha_1, \alpha_2, \dots), (0, \beta_1, \beta_2, \dots\rangle \\
&= \alpha_2\overline{\beta_1} + \alpha_3\overline{\beta_2} + \cdots \\
&= \langle(\alpha_2, \alpha_3, \dots), (\beta_1, \beta_2, \dots)\rangle.
\end{aligned}$$

Ainsi S^* est bien donné par la formule annoncée. ■

Définition 3.5 *Un opérateur $A \in \mathscr{L}(H)$ est dit*
- ***hermitien** ou **auto-adjoint** si $A^* = A$.*
- ***positif** s'il est hermitien et si de plus $\langle Ah, h\rangle \geqslant 0$ pour tout $h \in H$.*
- ***unitaire** si A est inversible et $A^* = A^{-1}$.*
- ***normal** si $AA^* = A^*A$.*

Proposition 3.6 *Si A est auto-adjoint, alors*

$$\|A\| = \sup\{|\langle Ah, h\rangle| : \|h\| = 1\}$$

DÉMONSTRATION — Soit $M = \sup\{|\langle Ah, h\rangle| : \|h\| = 1\}$. Si $\|h\| = 1$, alors $|\langle Ah, h\rangle| \leqslant \|A\|$ et donc $M \leqslant \|A\|$. D'autre part, remarquons d'abord que pour tout f dans H, $|\langle Af, f\rangle| \leqslant M\|f\|^2$. Si $\|h\| = \|g\| = 1$, alors

$$\begin{aligned}
\langle A(h \pm g), h \pm g\rangle &= \langle Ah, h\rangle \pm \langle Ah, g\rangle \pm \langle Ag, h\rangle + \langle Ag, g\rangle \\
&= \langle Ah, h\rangle \pm \langle Ah, g\rangle \pm \langle g, A^*h\rangle + \langle Ag, g\rangle
\end{aligned}$$

Puisque $A = A^*$, cela implique

$$\langle A(h \pm g), h \pm g\rangle = \langle Ah, h\rangle \pm 2\Re\langle Ah, g\rangle + \langle Ag, g\rangle$$

En soutrayant l'une de l'autre de ces inégalités, on obtient

$$4\Re\langle Ah, g\rangle = \langle A(h+g), h+g\rangle - \langle A(h-g), h-g\rangle \leqslant M(\|h+g\|^2 + \|h-g\|^2).$$

On obtient alors, par l'identité du parallélogramme,

$$4\Re\langle Ah, g\rangle \leqslant 2M(\|h\|^2 + \|g\|^2) = 4M.$$

Soit maintenant $\theta \in [0, 2\pi]$ tel que $\langle Ah, g\rangle = e^{i\theta}|\langle Ah, g\rangle|$. En appliquant l'inégalité précédente avec $e^{i\theta}h$ à la place de h, on obtient $[\langle Ah, g\rangle| \leqslant M$ dès lors que $\|h\| = \|g\| = 1$. On prenant le supremum sur g et h, on obtient $\|A\| \leqslant M$. ■

Corollaire 3.7 *Si $A = A^*$ et si $\langle Ah, h\rangle = 0$ pour tout h, alors $A = 0$.*

Ce corollaire n'est pas vrai si on ne suppose pas $A = A^*$. Par exemple, soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sur $\mathbf{R}^2$. Alors $\langle Ah, h\rangle = 0$ pour tout $h \in \mathbf{R}^2$.

Si H est un espace de Hilbert complexe et si $A \in \mathscr{L}(H)$, alors les opérateurs $B = (A + A^*)/2$ et $C = (A - A^*)/2i$ sont auto-adjoints et $A = B + iC$. Les opérateurs B et C sont appelés respectivement **partie réelle** et **partie imaginaire** de A.

Proposition 3.8 *Soit $A \in \mathscr{L}(H)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(a) A est normal.

(b) $\|Ah\| = \|A^*h\|$ *pour tout* h.

Dans le cas complexe, ces assertions sont équivalentes à

(c) Les parties réelles et imaginaires de A *commutent.*

Démonstration — Si $h \in H$, alors $\|Ah\|^2 - \|A^*h\|^2 = \langle Ah, Ah\rangle - \langle A^*h, A^*h\rangle = \langle (A^*A - AA^*)h, h\rangle$. Puisque $A^*A - AA^*$ est hermitien, l'équivalence de (a) et (b) découle du corollaire 3.7.

Si B et C sont les parties réelle et imaginaire de A, alors on calcule

$$A^*A = B^2 - iCB + iBC + C^2,$$

$$AA^* = B^2 + iCB - iBC + C^2,$$

et donc $A^*A = AA^*$ si et seulement si $BC = CB$. ■

Un opérateur $A \in \mathscr{L}(H)$ est une **isométrie** si il préserve la norme, c'est-à-dire si $\|Ah\| = \|h\|$ pour tout h.

Proposition 3.9 *Si* $A \in \mathscr{L}(H)$*, les assertions suivantes sont équivalentes*

1. A *est une isométrie.*
2. $A^*A = \mathrm{Id}$.
3. $\langle Ah, Ag\rangle = \langle h, g\rangle$ *pour tout* h, g *dans* H.

Démonstration — Comme $\langle A^*Ah, g\rangle = \langle Ah, Ag\rangle$, on voit facilement que (2) et (3) sont équivalents. On obtient (1) à partir de (3) en prenant $g = h$. Pour montrer (1) $\Longrightarrow$ (3), on utilise la formule de « polarisation »

$$\langle Ah, Ag\rangle = \frac{1}{4}\left(\|A(h+g)\|^2 - \|A(h-g)\|^2 + i\|A(h+ig)\|^2 - i\|A(h-ig)\|^2\right)$$

■

Terminons avec un théorème facile mais important

Théorème 3.10 *Si* $A \in \mathscr{L}(H)$*, alors* $\ker A = (\operatorname{Im} A^*)^\perp$.

Démonstration — Si $h \in \ker A$ et $g \in H$, alors $\langle h, A^*g\rangle = \langle Ah, g\rangle = 0$ donc $\ker A \subset (\operatorname{Im} A^*)^\perp$. Dans l'autre direction, si $h \perp \operatorname{Im} A^*$ et $g \in H$, alors $\langle Ah, g\rangle = \langle h, A^*g\rangle = 0$, et donc $(\operatorname{Im} A^*)^\perp \subset \ker A$. ■

Exercices

Exercice 3.1 — Démontrer la proposition 3.2 (*)

Exercice 3.2 — Soit (X, Ω, μ) un espace mesuré σ-fini et M_φ l'opérateur de multiplication de symbole φ. Déterminer M_φ^*. (*)

Exercice 3.3 — Si H est de dimension finie et $A \in \mathscr{L}(H)$ est défini par sa matrice m, montrer que A^* est représenté par la transconjuguée de m, définie par $\overline{m}^T$. (*)

Exercice 3.4 — Si K est l'opérateur intégral de noyau k, montrer que K^* est l'opérateur intégral de noyau k^* défini par $k^*(x, y) = \overline{k(y, x)}$. (**)

Exercice 3.5 — Montrer que (*)

1. Un opérateur de multiplication M_φ est toujours normal ; M_φ est hermitien si et seulement si φ prend des valeurs réelles ; M_φ est unitaire si et seulement si $|\varphi| = 1$ presque partout.
2. Un opérateur intégral K de noyau k est hermitien si et seulement si $k(x, y) = \overline{k(y, x)}$ presque partout.
3. Le shift n'est pas normal.

Exercice 3.6 — Quel est l'adjoint de l'opérateur de Volterra V ? Quelle est l'image de $V + V^*$? (**)

Exercice 3.7 — Soit A et B deux opérateurs auto-adjoints. Montrer que AB est auto-adjoint si et seulement si A et B commutent. (*)

Exercice 3.8 — Soit A un opérateur normal. Monter que A est injectif si et seulement si A a une image dense. Donner un exemple d'un opérateur B injectif d'image non dense, et d'un opérateur C surjectif et non injectif. (**)

Exercice 3.9 — Soit $f(z) = \sum \alpha_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$. Si A est un opérateur avec $\|A\| < R$, construire un opérateur T tel que pour tous $h, g \in H$ (***)

$$\langle Th, g\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \langle A^n h, g\rangle.$$

Cet opérateur est noté $f(A)$. Montrer que si A est auto-adjoint, alors $\exp(iA)$ est unitaire.

Exercice 3.10 — A quelle condition sur le symbole $\varphi \in L^\infty[0,1]$ est-ce qu'un opérateur de multiplication $M_\varphi : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ est injectif ? (**)

Exercice 3.11 — A quelle condition sur le symbole $\varphi \in L^\infty[0,1]$ est-ce qu'un opérateur de multiplication $M_\varphi : L^2[0,1] \to L^2[0,1]$ est surjectif ? (****)

Exercice 3.12 — Si H est un espace de Hilbert **complexe** et si $A \in \mathscr{L}(H)$ vérifie $\langle Ah, h\rangle = 0$ pour tout $h \in H$, montrer que $A = 0$. (**)

Exercice 3.13 — Soit $A \in \mathscr{L}(H)$. Montrer que A est unitaire si et seulement si A est une isométrie normale. (*)

Exercice 3.14 — Si H est un espace de Hilbert **complexe** et $A \in \mathscr{L}(H)$, montrer que A est hermitien si et seulement si $\langle Ah, h\rangle \in \mathbf{R}$ pour tout $h \in H$. Montrer que l'équivalence est fausse pour les espaces de Hilbert réels. (***)

Exercice 3.15 — Montrer qu'un projecteur orthogonal est auto-adjoint. (**)

Exercice 3.16 — Montrer que si un opérateur A est positif, alors pour tout $n \geqslant 1$, l'opérateur A^n est positif. (***)

Exercice 3.17 — Démontrer le lemme de Douglas (1966) : si A et B sont deux opérateurs sur un espace de Hilbert H, il y a équivalence entre (*****)

(a) $\operatorname{Im} A \subset \operatorname{Im} B$.

(b) Il existe une constante $\lambda \geqslant 0$ telle que $\lambda BB^* - AA^*$ est un opérateur positif.

(c) Il existe $C \in \mathscr{L}(H)$ tel que $A = BC$.

Indications : pour démontrer (a) $\Longrightarrow$ (c), on montrera que pour tout $f \in H$, il existe un unique $h \in (\ker B)^\perp$ tel que $Bh = Af$; en posant $h = Cf$ on montrera que C un opérateur. Pour démontrer (b) $\Longrightarrow$ (c), on définira D sur $\operatorname{Im}(B^*)$ par $D(B^*f) = A^*f$ et on montrera que l'on peut prolonger D en un opérateur sur H.

Exercice 3.18 — Soit A un opérateur normal. Montrer que $\ker(A) = \ker(A^*)$ et $\operatorname{Im}(A) = \operatorname{Im}(A^*)$. Indication : utiliser l'exercice précédent. (***)

Chapitre 4

Opérateurs compacts

Nous introduisons dans ce chapitre les opérateurs compacts, qui en un certain sens se comportent le même manière que les opérateurs en dimension finie. On note B_H la boule-unité fermée de H.

Définition 4.1 *Soit $T \in \mathscr{L}(H)$. On dit que T est* **compact** *si l'adhérence de $T(B_H)$ est compacte dans H. On note $\mathscr{K}(H)$ l'ensemble des opérateurs compacts.*

Quand H est de dimension finie, le théorème 0.5 implique que Id n'est pas compact.

Proposition 4.2 *$\mathscr{K}(H)$ est un idéal fermé de l'algèbre $\mathscr{L}(H)$, c'est-à-dire que*

1. *$\mathscr{K}(H)$ est un sous-espace fermé de $\mathscr{L}(H)$ (pour la norme opérateur).*
2. *Si $A \in \mathscr{L}(H)$ et $B \in \mathscr{K}(H)$, alors AB et BA sont compacts.*

Définition 4.3 *Un opérateur $T \in \mathscr{L}(H)$ est dit* **de rang fini** *si $\operatorname{Im} T$ est de dimension finie ; son rang est la dimension de $\operatorname{Im} T$.*

Théorème 4.4 *Soit $T \in \mathscr{L}(H)$. Les assertions suivantes sont équivalentes*

(a) T est compact.

(b) T^* est compact.

(c) Il existe une suite (T_n) d'opérateurs de rang fini qui converge vers T (pour la norme opérateur).

DÉMONSTRATION —

(c) $\Longrightarrow$ (a) C'est une conséquence du fait que $\mathscr{K}(H)$ est fermé et qu'un opérateur de rang fini est compact.

(a) $\Longrightarrow$ (c) Soit $L = \operatorname{adh}(\operatorname{Im} T)$. Si L est de dimension finie, le résultat est évident ; sinon soit $(e_1, e_2, \dots)$ une base hilbertienne de L. Soit P_n la projection orthogonale sur $\operatorname{Vect}(e_1, \dots, e_n)$. On pose $T_n = P_n T$, il est clair que T_n est de rang fini. On vérifie d'abord que

Lemme 4.5 *Si $h \in H$, alors la suite $(T_n h)$ converge vers Th.*

En effet, posons $k = Th$, et $\alpha_n = \langle k, e_n \rangle$. Alors $T_n h = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ et donc $\|Th - T_n h\|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k|^2$. Comme la série $\sum |\alpha_k|^2$ converge, cette quantité tend vers 0.

Si T est compact, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $T(B_H)$ est contenu dans la réunion d'un nombre fini de boules de rayon $\varepsilon/3$. Soient $Th_1, \dots, Th_m$ les centres de ces boules. Si $\|h\| \leqslant 1$, il existe un j tel que $\|Th - Th_j\| \leqslant \varepsilon/3$, et donc pour tout n,

$$\begin{aligned} \|Th - T_n h\| &\leqslant \|Th - Th_j\| + \|Th_j - T_n h_j\| + \|P_n(Th_j - Th)\| \\ &\leqslant 2\|Th - Th_j\| + \|Th_j - T_n h_j\| \\ &\leqslant 2\varepsilon/3 + \|Th_j - T_n h_j\| \end{aligned}$$

D'après le lemme, il existe un entier n_0 tel que si $n \geqslant n_0$, alors $\|Th_j - T_n h_j\| < \varepsilon/3$ pour tout j. Ainsi $\|(T - T_n)h\| \leqslant \varepsilon$ pour tout h vérifiant $\|h\| \leqslant 1$, et donc $\|T - T_n\| \leqslant \varepsilon$. pour $n \geqslant n_0$, ce qui montre que la suite (T_n) converge vers T.

(b) $\iff$ (c) Cette équivalence est une conséquence de l'équivalence A de rang fini $\iff$ A^* de rang fini, que nous laissons en exercice.

■

Au cours de l'implication (a) $\implies$ (c), on a en fait montré le corollaire suivant

Corollaire 4.6 *Si $T \in \mathscr{L}(H)$ est un opérateur compact et $(e_1, e_2, \dots)$ est une base orthonormale de H, et si on note P_n la projection orthogonale sur* $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$*, alors $\|P_n T - T\| \to 0$.*

Définition 4.7 *Soit $T \in \mathscr{L}(H)$.*

1. *Un nombre complexe λ est une **valeur propre** de T s'il existe un vecteur $h \in H$, $h \neq 0$ tel que $Th = \lambda h$. Un tel vecteur h est appelé un **vecteur propre** de T.*
2. *On appelle **spectre ponctuel** de T, et on note $\sigma_p(T)$, l'ensemble des valeurs propres de T.*
3. *Le **spectre** de T est défini comme*

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbf{C} \text{ t.q. } T - \lambda \mathrm{Id} \text{ n'est pas inversible.}\}$$

Comme un opérateur inversible est nécessairement injectif, on a $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$.

Proposition 4.8 *Soit T un opérateur compact et $\lambda \in \sigma_p(T)$. Si $\lambda \neq 0$, alors l'espace propre* $\ker(T - \lambda \mathrm{Id})$ *est de dimension finie.*

Démonstration — Supposons par l'absurde que $\ker(T - \lambda \mathrm{Id})$ contienne une suite orthonormale infinie (e_n). Comme T est compact, on peut en extraire une sous-suite (e_{n_k}) telle que (Te_{n_k}) converge. Mais pour $n_k \neq n_j$, on a

$$\|Te_{n_k} - Te_{n_j}\| = |\lambda| \cdot \|e_{n_k} - e_{n_j}\| = \sqrt{2}|\lambda|,$$

ce qui contredit le fait que (Te_{n_k}) est une suite de Cauchy. ■

La proposition suivante est utile pour prouver qu'un opérateur compact a des valeurs propres.

Proposition 4.9 *Soit T un opérateur compact et $\lambda \neq 0$. Si* $\inf\{\|(T - \lambda \mathrm{Id})h\| : \|h\| = 1\} = 0$*, alors $\lambda \in \sigma_p(T)$.*

Démonstration — Par hypothèse, il existe une suite (h_n) de vecteurs de norme 1 telle que $\|(T - \lambda \mathrm{Id})h_n\| \to 0$. Comme T est compact, il existe une sous-suite (h_{n_k}) telle que (Th_{n_k}) converge vers $f \in H$. En écrivant $h_{n_k} = \lambda^{-1}[Th_{n_k} - (T - \lambda \mathrm{Id})H_{n_k}]$, on voit que h_{n_k} converge vers $\lambda^{-1} f$. En particulier $\|f\| = |\lambda|$ donc $f \neq 0$. De plus, (Th_{n_k}) converge alors vers $\lambda^{-1} Tf$, ce qui montre que $\lambda^{-1} Tf = f$, donc $Tf = \lambda f$. On a donc bien trouvé un vecteur propre, et $\lambda \in \sigma_p(T)$. ■

Exercices

Exercice 4.1 — Démontrer la proposition 4.2. Pour montrer que $\mathscr{K}(H)$ est fermé, on pourra procéder comme suit : soit T dans l'adhérence de $\mathscr{K}(H)$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $T(B_H)$ peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε. En déduire que $T(B_H)$ a une adhérence compacte. (****)

Exercice 4.2 — Montrer qu'un opérateur de rang fini est compact. (**)

Exercice 4.3 — Soit $A \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur de rang 1. Montrer qu'il existe x, y dans H tels que pour tout $h \in H$, $Ah = \langle h, y\rangle x$. Que vaut alors A^* ? (***)

Exercice 4.4 — Montrer que A est de rang fini si et seulement si A^* est de rang fini et terminer la preuve du théorème 4.4. (***)

Exercice 4.5 — Montrer qu'un opérateur compact qui a une image fermée est de rang fini. (***)

Exercice 4.6 — Si $T \in \mathscr{L}(H)$ est compact et si $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une base orthonormale de H, montrer que $\|Te_n\|$ tend vers 0. (***)

Exercice 4.7 — Soit H un espace de Hilbert et $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une base orthonormale de H. Soit (α_n) une suite bornée de scalaires. Monter que l'opérateur diagonal A défini par $Ae_n = \alpha_n e_n$ est compact si et seulment si $\lim \alpha_n = 0$. (**)

Exercice 4.8 — Montrer que si un symbole $\varphi \in L^\infty(0,1)$ est tel que l'opérateur correspondant $M_\varphi \in \mathscr{L}(L^2[0,1])$ est compact, alors $\varphi = 0$ p.p. (***)

Exercice 4.9 — Soit $k \in L^2([0,1]^2)$ et K l'opérateur intégral associé. Montrer que $\|K\| \leqslant \|k\|_{L^2}$. En déduire que tout opérateur de ce type est compact. C'est en particulier le cas de l'opérateur de Volterra. (*****)

Indication : soit $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une base Hilbertienne de $L^2([0,1])$. On pose $f_{ij}(x,y) = f_i(x)f_j(y)$. Montrer que $(f_{ij})_{i,j\in\mathbf{N}}$ est une base Hilbertienne de $L^2([0,1]^2)$, et que l'opérateur intégral associé à f_{ij} est de rang 1.

Exercice 4.10 — Montrer que le spectre ponctuel de l'opérateur de Volterra est vide. (****)

Exercice 4.11 — Quel est le spectre ponctuel du shift sur $\ell_2(\mathbf{N})$? (**)

Exercice 4.12 — Montrer que le spectre ponctuel d'un opérateur unitaire est contenu dans le cercle-unité. (**)

Exercice 4.13 — Soit T un opérateur compact sur un espace de dimension infinie. Montrer que $0 \in \sigma(T)$. A-t-on forcément $0 \in \sigma_p(T)$? (**)

Exercice 4.14 — Soit T un opérateur compact et λ un nombre complexe tel que $\lambda \neq 0$, $\lambda \notin \sigma_p(T)$ et $\overline{\lambda} \notin \sigma_p(T^*)$. Montrer que $T - \lambda\mathrm{Id}$ est inversible — et donc, $\lambda \notin \sigma(T)$. (****)

Exercice 4.15 — Montrer qu'un opérateur $T \in \mathscr{L}(H)$ est compact si et seulement si, dès que (x_n) converge faiblement vers x, alors (Tx_n) converge en norme vers Tx. On rappelle qu'une suite (x_n) converge faiblement vers x si $\lim\langle x_n, h\rangle = \langle x, h\rangle$ pour tout $h \in H$. (****)

Exercice 4.16 — Soit (e_n) une base orthonormale d'un espace de Hilbert H. Si $A \in \mathscr{L}(H)$, on définit la quantité $\|A\|_{HS}$ par (****)

$$\|A\|_{HS} = \sqrt{\sum_{n\in\mathbf{N}} \|Ae_n\|^2}.$$

On note $C_2 = \{A \in \mathscr{L}(H) \text{ t.q. } \|A\|_{HS} < +\infty\}$. Montrer que la valeur de $\|A\|_{HS}$ ne dépend pas du choix de la base orthonormale, et que $(C_2, \|\cdot\|_{HS})$ est un espace de Banach, et même un espace de Hilbert. Les opérateurs dans C_2 sont appelés opérateurs de Hilbert–Schmidt.

Chapitre 5

Diagonalisation des opérateurs compacts auto-adjoints et normaux

Voici le principal résultat du chapitre : tout opérateur compact auto-adjoint est diagonalisable.

Théorème 5.1 *Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur compact auto-adjoint. Alors il existe une suite (λ_n) de réels tendant vers 0, et une famille orthonormale (e_n) dans H tels que, si P_n désigne la projection sur* $\operatorname{Vect} e_n$*,*

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n,$$

la convergence ayant lieu au sens de la norme opérateur.

Avant de démontrer le théorème 5.1, énonçons quelques résultats généraux. Un sous-espace fermé $E \subset H$ est dit **invariant** par A si $A(E) \subset E$. Le lemme suivant est facile

Lemme 5.2 *Soit $E \subset H$ un sous-espace fermé, et $A \in \mathscr{L}(H)$. Alors E est invariant par A si et seulement si $E^{\perp}$ est invariant par A^*.*

Proposition 5.3 *Si A est un opérateur normal et $\lambda \in \mathbf{K}$, alors $\ker(A - \lambda \mathrm{Id}) = \ker(A - \lambda \mathrm{Id})^*$. De plus, l'espace $\ker(A - \lambda \mathrm{Id})$ est invariant par A et par A^*.*

Proposition 5.4 *Si A est un opérateur normal, et λ, μ sont deux scalaires distincts, alors $\ker(A - \lambda \mathrm{Id}) \perp \ker(A - \mu \mathrm{Id})$.*

Proposition 5.5 *Si A est auto-adjoint, alors $\sigma_p(A) \subset \mathbf{R}$.*

Pour démontrer le théorème 5.1, il faudra exhiber des valeurs propres de T. Pour cela, le lemme-clé est le suivant

Lemme 5.6 *Si T est un opérateur compact auto-adjoint, alors l'un des deux nombres $\pm\|T\|$ est une valeur propre de T.*

Démonstration — Si $T = 0$, c'est évident. Sinon, la proposition 3.6 fournit une suite (h_n) de vecteurs de norme 1 telle que $|\langle Th_n, h_n \rangle| \to \|T\|$. Quitte à remplacer (h_n) par une de ses sous-suites, on peut supposer que $\langle Th_n, h_n \rangle \to \lambda$, avec $\lambda = \pm\|T\|$. On a

$$0 \leqslant \|(T - \lambda \mathrm{Id})h_n\|^2 = \|Th_n\|^2 - 2\lambda \langle Th_n, h_n \rangle + \lambda^2 \to 0,$$

et donc $\lim \|(T - \lambda \mathrm{Id})h_n\| = 0$. Par la proposition 4.9, cela implique que $\lambda \in \sigma_p(T)$. ■

Démonstration du théorème 5.1 — Par le lemme 5.6, $\sigma_p(T)$ contient un nombre réel, λ_1, égal à $\pm\|T\|$. Soit $E_1 = \ker(T - \lambda_1 \mathrm{Id})$ et π_1 la projection sur E_1. Soit $H_2 = E_1^{\perp}$. Par la proposition 5.3, E_1 et H_2

sont des sous-espaces invariants de T. On appelle T_2 la restriction de T à H_2 ; on vérifie que $T_2 \in \mathscr{L}(H_2)$ est un opérateur compact auto-adjoint.

On applique le lemme 5.6 à T_2. Alors $\sigma_p(T_2)$ contient un nombre réel, λ_2, égal à $\pm\|T_2\|$. On pose $E_2 = \ker(T_2 - \lambda_2 \mathrm{Id}) \subset \ker(T - \lambda_2 \mathrm{Id})$. De plus on a nécessairement $\lambda_2 \neq \lambda_1$ puisque $E_2 \perp E_1$. On note P_2 la projection sur E_2 et $H_3 = (E_1 \oplus E_2)^\perp$. Notons aussi que $\|T_2\| \leqslant \|T\|$ et $|\lambda_2| \leqslant |\lambda_1|$.

On construit ainsi par récurrence une suite (λ_n) d'éléments distincts de $\sigma_p(T)$ telle que

1. $|\lambda_1| \geqslant |\lambda_2| \geqslant \dots$
2. Si $E_n = \ker(T - \lambda_n)$, alors $|\lambda_{n+1}| = \|T_{|(E_1 \oplus \cdots \oplus E_n)^\perp}\|$.

La première propriété implique que la suite $(|\lambda_n|)$ converge vers $\alpha \geqslant 0$. Montrons que $\alpha = 0$. Sinon, on pourrait choisir un vecteur e_n dans E_n avec $\|e_n\| = 1$. On a $Te_n = \lambda_n e_n$ et donc $\|Te_n - Te_m\|^2 = \lambda_n^2 + \lambda_m^2 \geqslant 2\alpha^2$. Aucune sous-suite de (Te_n) n'est donc de Cauchy. Mais comme T est compact, on peut extraire de (Te_n) une sous-suite convergente, ce qui est absurde.

Notons π_n la projection sur E_n ; on vérifie que

$$\left\| T - \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \pi_j \right\| = \left\| T_{|(E_1 \oplus \cdots \oplus E_n)^\perp} \right\| = |\lambda_{n+1}| \to 0,$$

ce qui montre que la série $\sum \lambda_n \pi_n$ converge normalement vers T. Pour obtenir la forme voulue par le théorème, on choisit une base orthonormale dans chaque espace propre E_n. Cela induit une écriture de π_n comme la somme d'un nombre fini de projecteurs de rang 1. On rassemble ensuite les bases orthonormales de E_n en une famille orthonormale de H. ■

Avant de poursuivre, énonçons un théorème sur les opérateurs qui commutent avec un opérateur diagonal.

Théorème 5.7 *Soit (P_n) une suite de projecteurs deux à deux orthogonaux, et (λ_n) une suite bornée de scalaires non nuls deux à deux distincts. Soit A l'opérateur diagonal $\sum \lambda_n P_n$. Soit $B \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur ; les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *$AB = BA$.*
2. *Pour tout n, le sous-espace $\operatorname{Im} P_n$ est invariant par B et B^*.*

DÉMONSTRATION —

1\. $\Longrightarrow$ 2. Supposons que $AB = BA$ et soit $h \in \operatorname{Im}(P_n)$. Comme les (λ_n) sont deux à deux distincts, $\operatorname{Im} P_n = \ker(A - \lambda_n \mathrm{Id})$, et donc $Ah = \lambda_n h$. Alors $\lambda_n Bh = B(\lambda_n h) = BAh = ABh$, et comme $\lambda_n \neq 0$ cela implique $Bh \in \operatorname{Im} P_n$ et donc $\operatorname{Im} P_n$ est invariant par B. On peut appliquer le même raisonnement à $A^* = \sum \overline{\lambda_n} P_n$ et B^* (qui commute avec A^*), donc B^* laisse aussi invariant $\operatorname{Im} P_n$

2\. $\Longrightarrow$ 1. On a $B(\operatorname{Im} P_n) \subset \operatorname{Im} P_n$, ce qui implique que $P_n B P_n = BP_n$. Le même raisonnement appliqué à B^* donne $P_n B^* P_n = B^* P_n$, et donc en prenant l'adjoint $P_n B P_n = P_n B$. On a donc $P_n B = BP_n$. On en déduit facilement que $AB = BA$.

■

Dans le cas complexe, on peut maintenant étendre le théorème 5.1 aux opérateurs compacts normaux.

Théorème 5.8 *Soit H un espace de Hilbert* ***complexe*** *et $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur compact normal. Alors il existe une suite (λ_n) de nombres complexes tendant vers 0, et une famille orthonormale (e_n) dans H tels que, si P_n désigne la projection sur* $\operatorname{Vect} e_n$,

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n,$$

la convergence ayant lieu au sens de la norme opérateur.

Démonstration — On définit les parties réelle et imaginaire de T par $A = (T + T^*)/2$ et $B = (T - T^*)/2i$. On vérifie que A et B sont deux opérateurs autoadjoints compacts qui commutent. On applique le théorème 5.1 à A, en découpant selon les espaces propres on obtient une écriture $A = \sum \alpha_n P_n$ où les (α_n) sont des réels non nuls tous distincts et (P_n) des projecteurs de rang fini. Puisque $AB = BA$, le théorème 5.7 implique que pour tout n, $\operatorname{Im} P_n$ est invariant par B. On vérifie que la restriction de $B_{|\operatorname{Im} P_n} \in \mathscr{L}(\operatorname{Im} P_n)$ est un opérateur auto-adjoint. On applique le théorème 5.1 à $B_{|\operatorname{Im} P_n}$ (ou bien la version « dimension finie » du théorème spectral), ce qui permet de décomposer $B_{|\operatorname{Im} P_n} = \sum_k \beta_k^{(n)} Q_k^{(n)}$, où $(Q_k^{(n)})$ sont des projecteurs de rang 1. De même, $\ker A$ est invariant par B. On applique aussi le théorème 5.1 à $B_{|\ker A}$. On réunit les bases orthonormales obtenues pour chaque application du théorème 5.1, ce qui donne une suite (P_n) de projecteurs de rang 1 deux à deux orthogonaux et deux suites $(\alpha_n), (\beta_n)$ tendant vers 0, telles que

$$A = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n P_n,$$

$$B = \sum_{n=1}^{+\infty} \beta_n P_n.$$

En posant $\lambda_n = \alpha_n + \beta_n$, on a bien l'écriture voulue pour T. ■

Une conséquence du théorème 5.1 est que l'on peut définir $f(A)$ lorsque A est un opérateur compact normal et f une fonction bornée de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$.

Définition 5.9 *On note $\ell^\infty(\mathbf{C})$ l'ensemble des fonctions bornées de $\mathbf{C}$ dans $\mathbf{C}$. Si A est un opérateur compact normal écrit sous la forme du théorème 5.8 et $\varphi \in \ell^\infty(\mathbf{C})$, on pose*

$$\varphi(T) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(\lambda_n) P_n + \varphi(0) P_0$$

où P_0 est la projection orthogonale sur $\ker T$.

Théorème 5.10 (Calcul fonctionnel borné pour les opérateurs compacts normaux) *Soit T un opérateur compact normal sur un espace de Hilbert complexe H. L'application $\varphi \mapsto \varphi(T)$, de $\ell^\infty(\mathbf{C})$ dans $\mathscr{L}(H)$, a les propriétés suivantes*

1. *$\varphi \mapsto \varphi(T)$ est linéaire et multiplicative, au sens où $(\varphi\psi)(T) = \varphi(T)\psi(T)$.*
2. *Si $\varphi \equiv 1$, alors $\varphi(T) = \mathrm{Id}$. Si $\varphi(z) = z$ pour tout $z \in \sigma_p(T) \cup \{0\}$, alors $\varphi(T) = T$.*
3. *$\|\varphi(T)\| = \sup\{|\varphi(\lambda)| : \lambda \in \sigma(T)\}$.*
4. *$\varphi(T)^* = \overline{\varphi}(T)$.*
5. *Si $A \in \mathscr{L}(H)$ vérifie $AT = TA$, alors $A\varphi(T) = \varphi(T)A$ pour tout $\varphi \in \ell^\infty(\mathbf{C})$.*

Exercices

Exercice 5.1 — Soit $(P_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de projecteurs deux à deux orthogonaux et (α_n) une suite bornée de scalaires. On pose $T = \sum \alpha_n P_n$, c'est-à-dire pour $h \in H$, (*)

$$Th = \sum_{n\in\mathbf{N}} \alpha_n P_n h$$

Est-ce que $\lim_{n\to+\infty} \left\| T - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k P_k \right\| = 0$?

Exercice 5.2 — L'opérateur T de l'exercice précédent est-il normal ? (*)

Exercice 5.3 — Soit $A \in \mathscr{L}(H)$ tel que $AT = TA$ pour tout opérateur compact T. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbf{K}$ tel que $A = \lambda\mathrm{Id}$. (**)

Exercice 5.4 — Démontrer la proposition 5.3 (*)

Exercice 5.5 — Démontrer la proposition 5.4 (**)

Exercice 5.6 — Démontrer la proposition 5.5 (*)

Exercice 5.7 — Soit T un opérateur compact normal. Montrer que $T \geqslant 0$ si et seulement si toutes les valeurs propres de T sont réelles positives. (**)

Exercice 5.8 — Soit T un opérateur compact auto-adjoint. Montrer qu'il existe des opérateurs positifs compacts A et B tels que $T = A - B$, et $AB = BA = 0$. Montrer de plus qu'il existe un unique couple (A, B) vérifiant ces conditions. (***)

Exercice 5.9 — Soit T un opérateur compact positif. Montrer qu'il existe un opérateur compact positif A tel que $A^2 = T$. (**)

Exercice 5.10 — Soit V l'opérateur de Volterra sur $L^2[0,1]$. Montrer que V^*V est compact et le diagonaliser. (****)

Exercice 5.11 — Démontrer le théorème 5.10 (***)

Chapitre 6

Le spectre d'un opérateur

Commençons par un lemme important basé sur les séries géométriques.

Lemme 6.1 *Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ avec $\|T - \mathrm{Id}\| < 1$. Alors T est inversible et on a la formule suivante (dite série de Neumann)*

$$T^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathrm{Id} - T)^n.$$

Démonstration — Posons $S = \mathrm{Id} - T$, et soit $r := \|S\|$; on a $r < 1$. Puisque $\|S^n\| \leqslant \|S\|^n = r^n$, la série $\sum \|S^n\|$ converge et donc la série $R := \sum_{n=0}^{\infty} S^n$ converge normalement. On a

$$(\mathrm{Id} + S + S^2 + \cdots + S^n)(\mathrm{Id} - S) = (\mathrm{Id} + S + \cdots + S^n) - (S + S^2 + \cdots + S^{n+1}) = \mathrm{Id} - S^{n+1}.$$

Comme $\|S^{n+1}\| \to 0$, on a $R(\mathrm{Id} - S) = \mathrm{Id}$. De même, on a $(\mathrm{Id} - S)R = \mathrm{Id}$. Ainsi $T = \mathrm{Id} - S$ est inversible et $T^{-1} = R$. ■

La complétude de l'espace $\mathscr{L}(H)$ (démontrée en exercice au chapitre 1) a été utilisée pour justifier la convergence de la série définissant R.

Corollaire 6.2 *Soit T_0 un opérateur inversible. Si un opérateur T vérifie $\|T - T_0\| < \|T_0^{-1}\|^{-1}$, alors T est inversible.*

Démonstration — Alors $\|T_0^{-1}T - \mathrm{Id}\| = \|T_0^{-1}(T - T_0)\| \leqslant \|T_0^{-1}\| \cdot \|T - T_0\| < 1$. Par le lemme précédent, $T_0^{-1}T$ est inversible. ■

Théorème 6.3 *L'ensemble G des éléments inversibles de $\mathscr{L}(H)$ est ouvert (pour la topologie induite par la norme opérateur). De plus, l'application $T \mapsto T^{-1}$ est continue de G dans G.*

Démonstration — Le fait que G est ouvert est une conséquence du corollaire 6.2.

Montrons d'abord que $T \mapsto T^{-1}$ est continue en Id. Soit (T_n) une suite convergeant vers Id. Soit $0 < \delta < 1$ et supposons que $\|T_n - \mathrm{Id}\| \leqslant \delta$. Par le lemme précédent,

$$T_n^{-1} = (\mathrm{Id} - (\mathrm{Id} - T_n))^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (\mathrm{Id} - T_n)^k = \mathrm{Id} + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{Id} - T_n)^k$$

et donc

$$\|T_n^{-1} - \mathrm{Id}\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} (\mathrm{Id} - T_n)^k \right\| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \|\mathrm{Id} - T_n\|^k \leqslant \delta/(1-\delta).$$

Cette quantité peut être rendue inférieure à n'importe quel $\varepsilon > 0$ fixé en choisissant δ assez petit. Alors $\|T_n - \mathrm{Id}\| < \delta$ implique $\|T_n^{-1} - \mathrm{Id}\| \leqslant \varepsilon$, ce qui prouve la continuité voulue.

Si maintenant une suite (T_n) d'éléments de G converge vers $T \in G$, alors $(T^{-1}T_n)$ converge vers Id. Par ce qui précède, $(T_n^{-1}T) = ((T^{-1}T_n)^{-1})$ converge vers Id, et en multipliant à droite par T^{-1} on obtient que (T_n^{-1}) converge vers T^{-1}. ■

Rappelons la définition du spectre d'un opérateur

Lemme 6.4 *Le **spectre** de T est défini comme*

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbf{C} \text{ t.q. } T - \lambda \mathrm{Id} \text{ n'est pas inversible}\}.$$

*On appelle **ensemble résolvant** le complémentaire du spectre : $\rho(T) = \mathbf{C} \setminus \sigma(T)$.*

Théorème 6.5 *Soit $T \in \mathscr{L}(H)$. Alors $\sigma(T)$ est un compact non vide de $\mathbf{C}$. De plus, $\sigma(T)$ est inclus dans le disque fermé de centre 0 et de rayon $\|T\|$, et la fonction $\lambda \mapsto (T - \lambda \mathrm{Id})^{-1}$ est analytique sur $\rho(T)$.*

Avant de faire la preuve, quelques mots sont nécessaires à propos des fonctions analytiques à valeurs dans un espace vectoriel. Si G est un ouvert de $\mathbf{C}$ et X un espace de Banach, on définit la dérivée de $f : G \to X$ en z_0 comme $\lim_{h\to 0} h^{-1}[f(z_0+h) - f(z_0)]$, dès lors que la limite existe. On dit que f est **analytique** si f a une dérivée continue sur G. Toute la théorie des fonctions analytiques s'étend à ce cadre. Les énoncés et les preuves de la formule de Cauchy, du théorème de Liouville ... sont valables mot pour mot dans ce contexte. De plus, $f : G \to X$ est analytique si et seulement si en tout $z_0 \in G$, il existe une suite (x_n) d'éléments de X telle que $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (z - z_0)^k x_k$ pour tout z tel que $|z - z_0| < r$, où r est la distance de z_0 à ∂G.

Démonstration du théorème 6.5 — Le corollaire 6.2 implique que $T - \lambda \mathrm{Id}$ est inversible dès lors que $|\lambda| > \|T\|$. Ainsi, $\sigma(T)$ est contenu dans le disque de centre 0 et de rayon $\|T\|$, et est donc borné.

Soit $G \subset \mathscr{L}(H)$ l'ensemble (ouvert) des opérateurs inversibles. L'application $\lambda \mapsto \lambda \mathrm{Id} - T$ est une application continue de $\mathbf{C}$ dans $\mathscr{L}(H)$, donc l'image réciproque de G est un ouvert de $\mathbf{C}$. Mais cet ensemble n'est autre que $\rho(T)$, et donc $\sigma(T)$ est fermé.

Définissons $F : \rho(T) \to \mathscr{L}(H)$ par $F(\lambda) = (\lambda \mathrm{Id} - T)^{-1}$. On utilise l'identité $A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}$ avec $A = (\lambda + h)\mathrm{Id} - T$ et $B = \lambda \mathrm{Id} - T$. Cela donne

$$\frac{F(\lambda+h) - F(\lambda)}{h} = \frac{((\lambda+h)\mathrm{Id} - T)^{-1}(-h)(\lambda \mathrm{Id} - T)^{-1}}{h} = -(((\lambda+h)\mathrm{Id} - T)^{-1}(\lambda \mathrm{Id} - T)^{-1}).$$

D'après le théorème 6.3, $\lim_{h\to 0}((\lambda+h)\mathrm{Id} - T)^{-1} = (\lambda \mathrm{Id} - T)^{-1}$ et donc $F'(\lambda)$ existe et vaut

$$F'(\lambda) = -(\lambda \mathrm{Id} - T)^{-2}.$$

Encore d'après le théorème 6.3, $F' : \rho(T) \to \mathscr{L}(H)$ est continue, et donc la fonction F est analytique.

On a vu au début de la preuve que $F(z) = z^{-1}(\mathrm{Id} - T/z)^{-1}$ pour $|z| > \|T\|$. Comme $\mathrm{Id} - T/z$ tend vers Id lorsque $|z|$ tend vers l'infini, son inverse aussi, et donc $\lim_{|z|\to\infty} F(z) = 0$. En particulier, F est bornée. Si $\sigma(T)$ était vide, alors la fonction F serait une fonction entière bornée, donc constante par le théorème de Liouville (vectoriel). Cette constante serait nécessairement 0 à cause de la condition à l'infini, ce qui est absurde car F prend ses valeurs dans les opérateurs inversibles. Ainsi le spectre n'est pas vide ! ■

Définition 6.6 *Si T est un opérateur sur H, son rayon spectral est défini comme*

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

Le supremum est atteint (et fini) puisque $\sigma(T)$ est compact.

On peut avoir $r(T) = 0$ même lorsque $T = 0$, comme le montre la matrice $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ en dimension 2.

Proposition 6.7 *La formule suivante est valable pour tout opérateur $T \in \mathscr{L}(H)$*

$$r(T) = \lim_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Démonstration — Posons $G = \{0\} \cup \{z \in \mathbf{C} \text{ t.q. } z^{-1} \in \rho(T)\}$. On vérifie que G est un ouvert de $\mathbf{C}$. Soit $f : G \to \mathscr{L}(H)$ définie par $f(0) = 0$ et $f(z) = (z^{-1}\mathrm{Id} - T)^{-1}$. La fonction f est analytique sur $G \setminus \{0\}$

et continue en 0. Elle est donc analytique sur G, et donc développable en série entière au voisinage de 0. Le lemme 6.1 fournit explicitement ce développement :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} T^n z^{-(n+1)} = z \sum_{n=0}^{\infty} z^n T^n.$$

La théorie des séries entières nous dit que cette série converge dès que $|z| < R$, où R est défini comme le rayon du plus grand disque ouvert centré en 0 contenu dans G. On vérifie que $R = \inf\{|\lambda| : \lambda^{-1} \in \sigma(T)\} = r(T)^{-1}$. Mais la théorie des séries entières (à valeurs vectorielles) nous dit aussi que $R^{-1} = \limsup \|T^n\|^{1/n}$. On a donc montré

$$r(T) = \limsup \|T^n\|^{1/n}.$$

Par ailleurs, si $\lambda \in \mathbf{C}$ et $n \geqslant 1$, on a l'identité

$$\lambda^n \mathrm{Id} - T^n = (\lambda^n \mathrm{Id} - T)(\lambda^{n-1}\mathrm{Id} + \lambda^{n-2}T + \cdots + T^{n-1}) = (\lambda^{n-1}\mathrm{Id} + \lambda^{n-2}T + \cdots + T^{n-1})(\lambda^n \mathrm{Id} - T)$$

Ceci montre que si $\lambda^n \mathrm{Id} - T^n$ est inversible, alors $\lambda \mathrm{Id} - T$ est aussi inversible. Donc si $\lambda \in \sigma(T)$, alors $\lambda^n \in \sigma(T^n)$, et donc par le théorème 6.5, $|\lambda^n| \leqslant \|T^n\|$. On en déduit que pour tout $\lambda \in \sigma(T), |\lambda| \leqslant \liminf \|T^n\|^{1/n}$, puis en prenant le supremum sur λ que $r(T) \leqslant \liminf \|T^n\|^{1/n}$. On a donc

$$r(T) \leqslant \liminf \|T^n\|^{1/n} \leqslant \limsup \|T^n\|^{1/n} = r(T),$$

et donc $r(T) = \lim \|T^n\|^{1/n}$.

■

Exercices

Exercice 6.1 — Quel est le spectre de l'opérateur de multiplication $M_\varphi \in \mathscr{L}(L^2[0,1])$ associé à un symbole $\varphi \in L^\infty(0,1)$ (on pourra éventuellement supposer que φ est continue) ? Et quel est le spectre ponctuel de M_φ ? (***)

Exercice 6.2 — Montrer que si un opérateur $T \in \mathscr{L}(H)$ est **nilpotent** (c'est-à-dire s'il existe $n \in \mathbf{N}$ tel que $T^n = 0$), alors $\sigma(T) = \{0\}$. La réciproque est-elle vraie ? (**)

Exercice 6.3 — Soit (T_n) une suite d'opérateurs convergeant vers T et $\alpha_n \in \sigma(T_n)$, avec $\lim \alpha_n = \alpha$. Est-ce que $\alpha \in \sigma(T)$? Et si on remplace le spectre par le spectre ponctuel ? (**)

Exercice 6.4 — Montrer que la fonction « rayon spectral » $r : \mathscr{L}(H) \mapsto \mathbf{R}^+$ est semi-continue supérieurement, c'est-à-dire que si (T_n) converge vers T, alors (***)

$$\limsup_{n\to\infty} r(T_n) \leqslant r(T).$$

Exercice 6.5 — Montrer que la fonction r de l'exercice précédent n'est pas continue. (****)

Exercice 6.6 — Si A et B sont deux opérateurs sur H, montrer que $\sigma(AB) \cup \{0\} = \sigma(BA) \cup \{0\}$. Donner un exemple où on a $\sigma(AB) \neq \sigma(BA)$. (***)

Indication : deviner une formule reliant $(\mathrm{Id} - XY)^{-1}$ et $(\mathrm{Id} - YX)^{-1}$ à l'aide d'un développement formel en série entière.

Exercice 6.7 — Soient A, B deux opérateurs. (***)

1. Si AB est inversible, est-ce que A est inversible ?
2. Si AB et BA sont inversibles, est-ce que A est inversible ?

Exercice 6.8 — Soit S le shift sur $\ell^2(\mathbf{N})$, défini par $S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$. Déterminer $\sigma(S), \sigma_p(S), \sigma(S^*)$ et $\sigma_p(S^*)$. (***)

Exercice 6.9 — Soit $A \in \mathscr{L}(H)$ une isométrie non surjective. Monter que $\sigma(A)$ est égal au disque-unité fermé. (*****)

Indication : on montrera que $\partial\sigma(A)$ est inclus dans le cercle-unité.

Exercice 6.10 — Soit $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint inversible. Montrer que (**)

$$\|T^{-1}\| = \inf\left\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(T)\right\}^{-1}.$$

Exercice 6.11 — Soit $K \subset \mathbf{C}$ un compact non vide. Montrer qu'il existe un opérateur $A \in \mathscr{L}(\ell^2(\mathbf{N}))$ tel que $\sigma(A) = K$. (***)

Exercice 6.12 — Soit $P \in \mathscr{L}(H)$ un projecteur orthogonal tel que $P \neq 0$ et $P \neq \mathrm{Id}$. Déterminer $\sigma(P)$. (***)

Exercice 6.13 — Soit $V \in \mathscr{L}(L^2[0,1])$ l'opérateur de Volterra défini par $(Vf)(x) = \int_0^x f(y)dy$. Montrer par récurrence sur n que V^n est un opérateur intégral, associé à un noyau k_n. Calculer k_n à l'aide d'une formule de récurrence. En déduire le spectre de V. (****)

Exercice 6.14 — Montrer que le spectre et le spectre ponctuel sont des invariants de conjugaison : si $A, B \in \mathscr{L}(H)$ et B est inversible, alors $\sigma(BAB^{-1}) = \sigma(A)$ et $\sigma_p(BAB^{-1}) = \sigma_p(A)$. (**)

Chapitre 7

Le calcul fonctionnel continu des opérateurs auto-adjoints

Le but de ce chapitre est de définir $f(A)$ lorsque $A \in \mathscr{L}(H)$ est un opérateur auto-adjoint, et $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue. Dans le cas où A est diagonalisé sous la forme $A = \sum \lambda_i P_i$, on peut poser $f(A) = \sum f(\lambda_i) P_i$. C'est le cas lorsque A est de plus supposé compact. Mais dans le cas général on a besoin d'une autre approche. Commençons par étudier le spectre d'un opérateur auto-adjoint.

Proposition 7.1 *Soit $A \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors le spectre de A est inclus dans $\mathbf{R}$.*

Démonstration — Soit A auto-adjoint ; remarquons d'abord qu'il est facile de vérifier que $\sigma_p(A) \subset \mathbf{R}$. Soit maintenant $\lambda \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, et notons $\alpha = |\Im \lambda| > 0$. Vérifions d'abord que $A - \lambda \mathrm{Id}$ est d'image dense. En effet, si $y \perp \mathrm{Im}(A - \lambda \mathrm{Id})$, alors pour tout $x \in H$, $0 = \langle (A - \lambda \mathrm{Id})x, y\rangle = \langle x, (A - \bar{\lambda}\mathrm{Id})y\rangle$, ce qui implique $Ay = \bar{\lambda} y$. Mais comme $\bar{\lambda} \in \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$, ce n'est pas une valeur propre de A et donc $y = 0$.

Comme $\langle Ax, x\rangle$ est réel pour tout x, on a l'inégalité

$$\alpha \cdot \|x\|^2 \leqslant |\langle (A - \lambda \mathrm{Id})x, x\rangle| \leqslant \|(A - \lambda \mathrm{Id})x\| \cdot \|x\|,$$

d'où l'on déduit que $\|(A - \lambda \mathrm{Id})x\| \geqslant \alpha \|x\|$ pour tout x dans H. Ceci implique d'une part que $A - \lambda \mathrm{Id}$ est injectif, et d'autre part qu'il est d'image fermée. En effet, si $((A - \lambda \mathrm{Id})x_n)$ converge vers y, cette inégalité implique que la suite (x_n) est de Cauchy, donc converge. Si on note x sa limite, la continuité de $A - \lambda \mathrm{Id}$ implique $y = (A - \lambda \mathrm{Id})x$.

Ainsi l'image de $A - \lambda \mathrm{Id}$ est fermée et dense, donc $A - \lambda \mathrm{Id}$ est surjectif. Nous savons déjà qu'il est injectif ; le théorème de l'opérateur inverse implique alors que $A - \lambda \mathrm{Id}$ est inversible. ■

Le cas le plus simple est celui d'un polynôme $P \in \mathbf{C}[X]$. Dans ce cas il n'y a aucun problème pour définir $P(A)$. De plus, l'application $\tau : \mathbf{C}[X] \to \mathscr{L}(H)$ définie par $\tau(P) = P(A)$ est un morphisme d'algèbres.

Proposition 7.2 *Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ un polynôme et $A \in \mathscr{L}(H)$. Alors*

$$P(\sigma(A)) = \sigma(P(A)).$$

Dans cette formule, $P(\sigma(A))$ désigne l'ensemble $\{P(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}$.

Démonstration —

$\subset$ Soit $\lambda \in \sigma(A)$. Il existe un polynôme Q tel que $P(X) - P(\lambda) = (X - \lambda)Q(X)$, et alors

$$P(A) - P(\lambda)\mathrm{Id} = (A - \lambda \mathrm{Id})Q(A) = Q(A)(A - \lambda \mathrm{Id}).$$

Cette identité montre que si $P(A) - P(\lambda)\mathrm{Id}$ était inversible, alors $A - \lambda \mathrm{Id}$ le serait aussi, et donc $P(\sigma(A)) \subset \sigma(P(A))$.

$\supset$ Si $P = 0$, l'inclusion est évidente. Sinon, soit $\lambda \in \sigma(P(A))$ et écrivons la factorisation du polynôme $P(X) - P(\lambda)$ dans $\mathbf{C}[X]$

$$P(X) - P(\lambda) = \gamma(X - \alpha_1)(X - \alpha_2) \cdots (X - \alpha_n).$$

Comme $P \neq 0$, γ est non nul. L'opérateur $P(A) - P(\lambda)\mathrm{Id}$ n'est pas inversible, donc nécessairement il existe un indice i tel que $A - \alpha_i \mathrm{Id}$ n'est pas inversible. Autrement dit, $\alpha_i \in \sigma(A)$. Comme $P(\alpha_i) = \lambda$, cela implique bien que $\lambda \in P(\sigma(A))$.

■

Lorsque K est un compact de $\mathbf{R}$, on note $C(K)$ l'algèbre des fonctions continues de K dans $\mathbf{R}$. On peut munir $C(K)$ d'une norme en posant $\|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in K\}$. L'espace $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach.

Théorème 7.3 (Calcul fonctionnel continu) *Soit H un espace de Hilbert (réel ou complexe) et $A \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Il existe une unique application linéaire τ de $C(\sigma(A))$ dans $\mathscr{L}(H)$ telle que*

a. $\tau(1) = \mathrm{Id}$.

b. $\tau(x \mapsto x) = A$.

c. τ est un morphisme d'algèbres, c'est-à-dire que $\tau(fg) = \tau(f)\tau(g)$ pour tous $f, g \in C(\sigma(A))$.

d. Pour tout $f \in C(\sigma(A))$, on a $\|\tau(f)\| = \|f\|_\infty$.

On note en général $f(A)$ plutôt que $\tau(f)$. De plus, on a les propriétés suivantes

e. Pour tout $f \in C(\sigma(A)), \sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.

f. Pour tout $f \in C(\sigma(A))$, $\tau(f)$ est auto-adjoint.

Commençons par quelques lemmes.

Lemme 7.4 *Soit $A \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur normal. Alors $r(A) = \|A\|$.*

Démonstration — On écrit (en dénotant par † l'utilisation de l'égalité $\|B\|^2 = \|BB^*\|$)

$$\|A^{2n}\|^2 \stackrel{\dagger}{=} \|A^{2n}(A^{2n})^*\| = \|(AA^*)^n((AA^*)^n)^*\| \stackrel{\dagger}{=} \|(AA^*)^n\|^2 = \|A^n(A^n)^*\|^2 \stackrel{\dagger}{=} \|A^n\|^4.$$

On en déduit immédiatement que $\|A^{2^k}\| = \|A\|^{2^k}$ pour tout entier k. D'après la proposition 6.7, on obtient en faisant tendre k vers $+\infty$ que $\|A\| = r(A)$. ■

Nous aurons aussi besoin du théorème de Stone–Weierstrass (que l'on suppose connu).

Lemme 7.5 (Théorème de Stone–Weierstrass) *Soit $K \subset \mathbf{R}$ un compact, et $\mathscr{P}$ l'ensemble des restrictions à K de polynômes dans $\mathbf{R}[X]$. Alors $\mathscr{P}$ est dense dans $C(K)$.*

Démonstration du théorème 7.3 — On pose $K = \sigma(A)$. Alors K est un compact, et d'après la proposition 7.1 on a $K \subset \mathbf{R}$. Soit $\mathscr{P} \subset C(K)$ l'ensemble des restrictions à K de polynômes à coefficients réels. Pour $p \in \mathscr{P}$, on pose $\tau(p) = p(A)$. Il faut vérifier que cette définition est bien consistante car des polynômes différents pourraient coïncider en restriction à K. Si p et q sont deux polynômes tels que $p(x) = q(x)$ pour tout $x \in K$, alors d'après la proposition 7.2, on a $\sigma((p-q)(A)) = (p-q)(\sigma(A)) = \{0\}$. Mais d'après le lemme 7.4, on a $\|(p-q)(A)\| = r((p-q)(A)) = 0$ et donc $p(A) = q(A)$. La définition est bien consistante, et de plus on a d'après le lemme 7.4 que pour tout $p \in \mathscr{P}$, $\|\tau(p)\| = \|p\|_\infty$.

D'après le lemme 7.5, on peut donc prolonger par continuité τ à $C(K)$. Vérifions que τ a les propriétés requises. Les propriétés a. et b. correspondent à $P(X) = 1$ et $P(X) = X$. La propriété c. est vraie lorsque f et g sont dans $\mathscr{P}$, et par densité elle s'étend à $C(K)$. De même, d. est vraie pour f dans $\mathscr{P}$ (c'est une conséquence de la proposition 7.2), et elle s'étend à $C(K)$ par densité. Il reste donc à prouver la propriété e., que nous connaissons à ce stade uniquement pour les polynômes.

Soit $\lambda \in \mathbf{C} \setminus f(K)$. Alors la fonction $g = (f - \lambda)^{-1}$ est continue sur K, et la propriété c. implique que $g(A)(f(A) - \lambda\mathrm{Id}) = (f(A) - \lambda\mathrm{Id})g(A) = \mathrm{Id}$, donc $f(A) - \lambda\mathrm{Id}$ est inversible, et $\lambda \notin \sigma(f(A))$. Ceci montre l'inclusion $\sigma(f(A)) \subset f(\sigma(A))$.

Réciproquement, soit $\lambda \in K$ et $f \in C(K)$. On veut montrer que $f(\lambda) \in \sigma(f(A))$. Raisonnons par l'absurde et supposons que $f(A) - f(\lambda)\mathrm{Id}$ est inversible. Comme l'ensemble des opérateurs inversibles, il existe ε tel que l'inégalité $\|f(A) - f(\lambda)\mathrm{Id} - B\| < \varepsilon$ implique que B est inversible. Par le lemme 7.5, on peut choisir un polynôme $p \in \mathscr{P}$ tel que $\|f - p\|_\infty \leqslant \varepsilon/2$. Alors

$$\|(f(A) - f(\lambda)\mathrm{Id}) - (p(A) - p(\lambda)\mathrm{Id})\| \leqslant \|(f-p)(A)\| + |f(\lambda) - p(\lambda)| \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2,$$

où pour majorer le premier terme on a utilisé la propriété d. Cela implique donc que $p(A) - p(\lambda)\mathrm{Id}$ est inversible, et donc que $p(\lambda) \notin \sigma(p(A))$. Mais par la proposition 7.2, on sait que $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$, ce qui aboutit à une contradiction.

Enfin, les conditions a., b. et c. déterminent uniquement τ sur l'algèbre engendrée par les fonctions $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x$, qui est exactement $\mathscr{P}$. Comme la condition d. implique que τ est continue, le prolongement à $C(K)$ est unique. ■

Voici une caractérisation agréable des opérateurs positifs.

Proposition 7.6 *Soit $A \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint. Alors A est positif si et seulement si son spectre est contenu dans $\mathbf{R}^+$.*

DÉMONSTRATION — Supposons que A est positif. Il est clair que $\sigma_p(A) \subset \mathbf{R}^+$. Comme $\langle Ax, x\rangle \geqslant 0$, si $\lambda < 0$ on a $\langle (A - \lambda\mathrm{Id})x, x\rangle \geqslant |\lambda| \cdot \|x\|^2$. On montre alors que $A - \lambda\mathrm{Id}$ est inversible de la même manière que dans la preuve de la proposition 7.1. Réciproquement, supposons que $\sigma(A) \subset \mathbf{R}^+$. Comme la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\sigma(A)$, le calcul fonctionnel permet de définir $B = \sqrt{A}$, c'est-à-dire un opérateur auto-adjoint tel que $\sigma(B) \subset \mathbf{R}^+$ et $B^2 = A$. Mais alors $\langle Ax, x\rangle = \langle B^2x, x\rangle = \langle Bx, Bx\rangle = \|Bx\|^2 \geqslant 0$, et donc A est positif. ■

Au cours de cette preuve, on a en fait montré le théorème suivant.

Corollaire 7.7 (Existence d'une racine carrée) *Soit $A \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint positif. Alors il existe un opérateur auto-adjoint positif B tel que $B^2 = A$.*

Il est facile d'étendre le calcul fonctionnel du théorème 7.3 aux fonctions à valeurs complexes. Si f est une fonction continue de $\sigma(A)$ dans $\mathbf{C}$, on peut la décomposer en $f = \Re f + i\Im f$, où $\Re f$ et $\Im f$ sont continues à valeurs dans $\mathbf{R}$. On peut alors définir $f(A) = (\Re f)(A) + i(\Im f)(A)$. Notons alors que $f(A)$ est normal, mais pas auto-adjoint en général.

Exercices

Exercice 7.1 — Soit A un opérateur auto-adjoint tel que $\sigma(A) = \{0, 1\}$. Montrer que A est un projecteur orthogonal. (***)

Exercice 7.2 — Soit A un opérateur auto-adjoint et λ un point isolé de $\sigma(A)$ (c'est-à-dire qu'il existe un ouvert $W \subset \mathbf{C}$ tel que $W \cap \sigma(A) = \{\lambda\}$). Montrer que λ est une valeur propre de A. (****)
Indication : utiliser l'exercice précédent.

Exercice 7.3 — Soit A l'opérateur sur $L^2[0,1]$ défini par $(Af)(t) = tf(t)$. Montrer que A est positif et calculer la racine carrée de A. (*)

Exercice 7.4 — Soit A un opérateur auto-adjoint positif. Montrer que TAT^* est positif pour tout opérateur T. (*)

Exercice 7.5 — Soient S et T deux opérateurs auto-adjoints positifs qui commutent. Montrer que ST est auto-adjoint positif. Montrer que ce n'est pas forcément vrai si on ne suppose plus que S et T commutent. (***)

Exercice 7.6 — Soit H un espace de Hilbert complexe et $T \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint positif. Montrer que pour tout $h \in H$, (***)
$$\|Th\|^2 \leqslant \|T\| \langle Th, h \rangle.$$

Exercice 7.7 — Si A et B sont deux opérateurs auto-adjoints, on écrit $A \leqslant B$ lorsque $B - A$ est positif. (*****)

1. Montrer que si $0 \leqslant A \leqslant B$, alors $0 \leqslant \sqrt{A} \leqslant \sqrt{B}$ (indication : supposer B inversible, et montrer que $\|B^{-1/2}AB^{-1/2}\| \leqslant 1$. En posant $C = B^{-1/2}A^{1/2}$, montrer que $r(DCD^{-1}) \leqslant 1$ pour tout D inversible, et conclure en utilisant un D bien choisi).
2. Montrer que la réciproque est fausse.

Chapitre 8

Spectre des opérateurs compacts et théorie de Fredholm

Si A est un opérateur compact normal, nous avons vu qu'il était diagonalisable dans une base orthonormale de vecteur propres. Si A n'est plus supposé normal, alors il ne peut plus être diagonalisable ; néanmoins il est possible de préciser la structure de son spectre. C'est l'objet de la première partie de ce chapitre.

Théorème 8.1 *Soit $K \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur compact. Alors le spectre de K est un ensemble au plus dénombrable qui contient 0. De plus, si $\lambda \in \sigma(K)$ et $\lambda \neq 0$, alors λ est une valeur propre de K, et l'espace-propre correspondant $\ker(K - \lambda \mathrm{Id})$ est de dimension finie. Enfin, si (λ_n) est une suite d'éléments distincts de $\sigma(K)$, alors $\lim \lambda_n = 0$.*

Nous allons démontrer plusieurs résultats préliminaires sous forme de lemmes.

Lemme 8.2 *Soit $K \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur compact, et posons $T = \mathrm{Id} - K$. Soit $M \subset H$ un sous-espace fermé tel que $T_{|M}$ est injectif. Alors il existe $c > 0$ tel que $\|Tx\| \geqslant c\|x\|$ pour tout x dans M, et donc $T(M)$ est un sous-espace fermé.*

Démonstration — Sinon, il existerait une suite (x_n) dans M avec $\|x_n\| = 1$ et $T(x_n) \to 0$. Comme K est compact, quitte à passer à une sous-suite on peut supposer que (Kx_n) converge, mais comme $\mathrm{Id} = T + K$, la suite (x_n) converge aussi ; soit $x \in M$ sa limite. On obtient $Tx = 0$ ce qui contredit l'hypothèse. Pour démontrer que $T(M)$ est fermé, soit (y_n) une suite dans M telle que (Ty_n) converge. L'inégalité démontrée précédemment implique que (y_n) est aussi de Cauchy, donc converge. Si on note y sa limite, alors $\lim Ty_n = Ty \in T(M)$. ■

Lemme 8.3 *Soit $K \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur compact, et $T = \mathrm{Id} - K$. Alors $\ker T$ est de dimension finie et $\mathrm{Im}\, T$ est fermé.*

Démonstration — Le premier point a déjà été vu (proposition 4.8). Soit $M = \ker(T)^\perp$. On vérifie que $T(M) = T(H) = \mathrm{Im}\, T$ et que $T_{|M}$ est injectif. Par le lemme précédent, $\mathrm{Im}\, T$ est fermée. ■

Lemme 8.4 *Si M et N sont deux sous-espaces fermés de H avec $M \subset N$ et $M \neq N$, alors il existe $y \in N$ avec $\|y\| = 1$ et $d(y, M) = 1$.*

Démonstration — Il suffit de choisir y dans $N \cap M^\perp$. ■

Lemme 8.5 *Soit $K \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur compact, et $T = \mathrm{Id} - K$. Il n'existe pas de suite infinie $(F_n)_{n \geqslant 0}$ ou $(F_n)_{n \leqslant 0}$ de sous-espaces fermés de H tels que pour tout n*

$$F_n \subset F_{n+1}, \quad F_n \neq F_{n+1}, \quad \text{et } T(F_{n+1}) \subset F_n.$$

Démonstration — Supposons l'existence d'une telle suite (F_n). Par le lemme précédent, on peut trouver pour tout n un vecteur $x_{n+1} \in F_{n+1}$ tel que $\|x_{n+1}\| = 1$ et $d(x_{n+1}, F_n) = 1$. De plus, le sous-espace F_n est invariant par K (puisqu'il est invariant par Id et par T). Si $k < l$, le vecteur $T(x_l) + K(x_k)$ est dans F_{l-1}, et donc

$$\|x_l - (T(x_l) + K(x_k))\| \geqslant d(x_l, F_{l-1}) = 1$$

et donc $\|Kx_l - Kx_k\| \geqslant 1$. On aurait alors dans $K(B_H)$ une suite infinie de points dont les distances mutuelles sont supérieures à 1, ce qui contredit la compacité de K. ■

Corollaire 8.6 *Soit $K \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur compact, et soit $T = \mathrm{Id} - K$. Alors la suite croissante $\ker(T^n)_{n \geqslant 0}$ est stationnaire, et la suite décroissante $\mathrm{Im}(T^n)_{n \geqslant 0}$ est stationnaire.*

Démonstration — C'est une conséquence du lemme précédent. Remarquons que $\mathrm{Im}(T^n)$ est fermé car T^n est de la forme $\mathrm{Id} - K_n$ pour un certain opérateur compact K_n (conséquence de la formule du binôme de Newton) ■

Corollaire 8.7 *Soit $K \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur compact, et $T = \mathrm{Id} - K$. Alors T est surjectif si et seulement si il est injectif.*

Démonstration — Supposons T surjectif et non injectif. Montrons par récurrence que $\ker(T^n) \neq \ker(T^{n+1})$. Pour l'étape de récurrence, soit $x \in \ker(T^{n+1}) \setminus \ker(T^n)$. Comme T est surjectif, il existe $y \in H$ tel que $x = Ty$. Alors $y \in \ker(T^{n+2}) \setminus \ker(T^{n+1})$.

De même, supposons T injectif et non surjectif. Montrons par récurrence que $\mathrm{Im}(T^n) \neq \mathrm{Im}(T^{n+1})$. En effet, si $x \in \mathrm{Im}(T^n) \setminus \mathrm{Im}(T^{n+1})$, alors $Tx \in \mathrm{Im}(T^{n+1})$ et $Tx \notin \mathrm{Im}(T^{n+2})$ (utiliser l'injectivité de T).

Dans les deux cas on conclut par le corollaire précédent ■

Nous pouvons maintenant démontrer le théorème énoncé au début du chapitre.

Démonstration du théorème 8.1 — Soit K un opérateur compact. Si $\lambda \neq 0$, on voit en appliquant le corollaire précédant à $\mathrm{Id} - \frac{1}{\lambda}K$ que

$$\lambda \in \sigma(K) \iff \lambda \in \sigma_p(K).$$

Soit maintenant (λ_n) une suite d'éléments de $\sigma(T)$, deux à deux distincts. Nous allons montrer que $\lim \lambda_n = 0$. On peut supposer que pour tout n, $\lambda_n \neq 0$, et alors $\lambda_n \in \sigma_p(T)$. Pour tout n on choisit $x_n \neq 0$ tel que $Kx_n = \lambda_n x_n$. On vérifie que la famille (x_n) est libre (considérer une liaison de longueur minimale et aboutir à une contradiction en lui appliquant K). Soit $M_n = \mathrm{Vect}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Par un lemme précédent, on peut choisir $y_n \in M_n$ tel que $\|y_n\| = 1$ et $d(y_n, M_{n-1}) = 1$. On vérifie alors que $(K - \lambda_n \mathrm{Id})y_n \in M_{n-1}$. Si $n > m$, alors

$$\lambda_n^{-1}K(y_n) - \lambda_m^{-1}K(y_m) = y_n - \left[y_m + \lambda_m^{-1}(K - \lambda_m \mathrm{Id})y_m - \lambda_n^{-1}(K - \lambda_n \mathrm{Id})y_n\right].$$

Comme l'expression entre crochets est dans M_{n-1}, on a $\|\lambda_n^{-1}K(y_n) - \lambda_m^{-1}K(y_m)\| \geqslant d(y_n, M_{n-1}) = 1$. Par conséquent la suite $(\lambda_n^{-1}K(y_n))$ n'a pas de sous-suite convergente. Mais si la suite (λ_n) ne tend pas vers 0, alors la suite $(\lambda_n^{-1}y_n)$ admet une sous-suite bornée, et K étant compact on aurait une sous-suite de $(\lambda_n^{-1}K(y_n))$ qui convergerait, d'où contradiction.

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, seul un nombre fini d'éléments de $\sigma(A)$ a un module supérieur à ε. Ceci montre que $\sigma(A)$ est au plus dénombrable, et les autres assertions du théorème ont déjà été démontrées. ■

Définition 8.8 *Si H est un espace de Hilbert et $F \subset H$ un sous-espace vectoriel (non supposé fermé), on appelle codimension de F la dimension de H/F. On note $\mathrm{codim}\, F = \dim(H/F)$. Ici H/F est l'espace vectoriel quotient, qui est une notion purement algébrique et n'utilise pas la structure d'espace de Hilbert.*

Lorsque F est fermé, on a la somme directe $H = F \oplus F^\perp$, donc H/F est isomorphe à $F^\perp$ et $\mathrm{codim}\, F = \dim(F^\perp)$.

Définition 8.9 *Un opérateur* $A \in \mathscr{L}(H)$ *est dit* ***de Fredholm*** *si* $\ker(A)$ *est de dimension finie et* $\mathrm{Im}(A)$ *est de codimension finie. On définit alors l'****indice*** *de* A *comme*

$$\mathrm{ind}(A) = \dim\ker A - \mathrm{codim}\,\mathrm{Im}\,A.$$

Proposition 8.10 *Un opérateur de Fredholm est d'image fermée ; en conséquence on a la formule*

$$\mathrm{ind}(A) = \dim\ker(A) - \dim\ker(A^*).$$

Démonstration — Soit A un opérateur de Fredholm. Quitte à remplacer A par $A_{|\ker(A)^\perp}$, on peut supposer que A est injectif. Comme $\mathrm{Im}\,A$ est de codimension finie, il existe $y_1, \dots, y_n \in H$ tels que $(\mathrm{Im}(A) + y_1, \dots, \mathrm{Im}(A) + y_n)$ soit une base de $H/\mathrm{Im}(A)$. Définissions un opérateur $T : H \oplus \mathbf{R}^n \to H$ par

$$T(x, v) = Ax + \sum_{j=1}^{n} v_j y_j.$$

Alors T est continu et bijectif, et donc inversible par le théorème de l'opérateur inverse. Ainsi il existe une constant $c > 0$ tel que $\|T(x,v)\| \geqslant c\|(x,v)\|$ pour tous x, v. En particulier $\|Ax\| \geqslant c\|x\|$ pour tout x, ce qui implique que $\mathrm{Im}\,A$ est fermé. La formule découle de la remarque précédente sur la codimension d'un sous-espace fermé. ■

Théorème 8.11 *Si* K *est un opérateur compact, alors* $\mathrm{Id} - K$ *est de Fredholm, et* $\mathrm{ind}(\mathrm{Id} - K) = 0$.

Démonstration — On a déjà vu que $\ker(\mathrm{Id} - K)$ est de dimension finie lorsque K est compact. De même, $\ker(\mathrm{Id} - K^*)$ est de dimension finie donc $\mathrm{Im}(\mathrm{Id} - K)$ (qui est fermé par un lemme précédent) est de codimension finie et $\mathrm{Id} - K$ est de Fredholm. Pour montrer que l'indice est nul, nous allons procéder par récurrence. Pour $n \in \mathbf{N}$, soit (P_n) la proposition « pour tout opérateur K compact tel que $\dim\ker(\mathrm{Id} - K) \leqslant n$, on a $\dim\ker(\mathrm{Id} - K) = \dim\ker(\mathrm{Id} - K^*)$ » . On a vu que si $\mathrm{Id} - K$ est injectif, alors il est aussi surjectif, et donc $\mathrm{Id} - K^*$ est aussi injectif. Ainsi P_0 est vraie.

Supposons que P_{n-1} est vraie. Soit K un opérateur compact tel que $\dim\ker(\mathrm{Id} - K) = n$. Alors $\mathrm{Id} - K$ n'est pas surjectif, et comme on sait qu'il est d'image fermée on peut choisir $y_0 \in \mathrm{Im}(\mathrm{Id} - K)^\perp$, avec $y_0 \neq 0$. De même, on peut choisir $x_0 \in \ker(\mathrm{Id} - K)$, $x_0 \neq 0$. Posons alors $K'(h) = K(h) + \langle h, x_0 \rangle y_0$. Alors K' est compact (c'est la somme d'un opérateur compact et d'un opérateur de rang 1). De plus, $(\mathrm{Id} - K')(h) = 0$ si et seulement si $(\mathrm{Id} - K')(h) = 0$ et $h \perp x_0$, donc $\dim\ker(\mathrm{Id} - K') = \dim\ker(\mathrm{Id} - K) - 1$. De même, on a $K'^*(h) = K^*(h) + \langle h, y_0 \rangle x_0$ donc $\dim\ker(\mathrm{Id} - K'^*) = \dim\ker(\mathrm{Id} - K^*) - 1$. On sait d'après l'hypothèse de récurrence que $\dim\ker(\mathrm{Id} - K') = \dim\ker(\mathrm{Id} - K'^*)$, et donc $\dim\ker(\mathrm{Id} - K) = \dim\ker(\mathrm{Id} - K^*)$. Ceci permet de conclure la récurrence. ■

Théorème 8.12 *Si* $A, B \in \mathscr{L}(H)$ *sont deux opérateurs de Fredholm, alors* BA *est aussi de Fredholm et*

$$\mathrm{ind}(BA) = \mathrm{ind}(A) + \mathrm{ind}(B).$$

Lemme 8.13 *Supposons que* H *admette les décompositions* $H = \mathscr{M} \oplus \mathscr{N} = \mathscr{M}' \oplus \mathscr{N}'$, *et soit* A *un opérateur donné par la matrice par blocs*

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & X \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} : \mathscr{M} \oplus \mathscr{N} \to \mathscr{M}' \oplus \mathscr{N}'$$

où $A_1 : \mathscr{M} \to \mathscr{M}'$, $X : \mathscr{N} \to \mathscr{M}'$ *et* $A_2 : \mathscr{N} \to \mathscr{N}'$. *Supposons que* A_1 *est inversible et que* $\mathscr{N}$ *et* $\mathscr{N}'$ *sont de dimension finie. Alors* A *est de Fredholm et* $\mathrm{ind}(A) = \dim\mathscr{N} - \dim\mathscr{N}'$.

Démonstration — On a $\mathrm{Im}\,A = \mathscr{M}' \oplus (\mathscr{N}' \cap \mathrm{Im}\,A)$, où $\mathscr{N}' \cap \mathrm{Im}\,A$ est de dimension finie donc fermé.

Soit l'application $\gamma : \ker(A_2) \to \ker(A)$ définie par $\gamma(h) = -A_1^{-1}X(h) \oplus h$. Il est facile de voir que γ est bijective, et donc $\dim\ker(A_2) = \dim\ker(A)$. De même, il est facile de voir que $\mathrm{Im}(A) = \mathscr{M}' \oplus \mathrm{Im}(A_2)$, d'où en prenant l'orthogonal $\ker(A^*) = \ker(A_2^*)$. Ainsi A est de Fredholm et $\mathrm{ind}(A) =$

$\dim\ker(A_2) - \dim\ker(A_2^*)$. Soit r le rang de la matrice A_2. Un calcul élémentaire d'algèbre linéaire donne $\operatorname{ind}(A) = (\dim\mathscr{N} - r) - (\dim\mathscr{N}' - r) = (\dim\mathscr{N} - \dim\mathscr{N}')$.

■

Démonstration du théorème 8.12 — On pose $\mathscr{M}' = (\operatorname{Im} A) \cap (\ker B)^{\perp}$ et $\mathscr{N}' = \mathscr{M}'^{\perp}$. Posons maintenant $\mathscr{M} = A^{-1}(\mathscr{M}') \cap (\ker A)^{\perp}$, $\mathscr{N} = \mathscr{M}^{\perp}$, $\mathscr{M}'' = B(\mathscr{M}')$ et $\mathscr{N}'' = \mathscr{M}''^{\perp}$. On vérifie que $\mathscr{N}, \mathscr{N}'$ et $\mathscr{N}''$ sont de dimension finie et que les opérateurs A et B sont donnés par les matrices par blocs

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & X \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} : \mathscr{M} \oplus \mathscr{N} \to \mathscr{M}' \oplus \mathscr{N}',$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 & Y \\ 0 & B_2 \end{bmatrix} : \mathscr{M}' \oplus \mathscr{N}' \to \mathscr{M}'' \oplus \mathscr{N}'',$$

où A_1 et B_1 sont inversibles. Un calcul élémentaire montre que BA s'écrit

$$BA = \begin{bmatrix} B_1A_1 & Z \\ 0 & B_2A_2 \end{bmatrix} : \mathscr{M} \oplus \mathscr{N} \to \mathscr{M}'' \oplus \mathscr{N}''.$$

D'après le lemme précédent, on a $\operatorname{ind}(A) = \dim\mathscr{N} - \dim\mathscr{N}', \operatorname{ind}(B) = \dim\mathscr{N}' - \dim\mathscr{N}''$ et $\operatorname{ind}(BA) = \dim\mathscr{N} - \dim\mathscr{N}''$, ce qui démontre bien la formule annoncée. ■

Exercices

Exercice 8.1 — Montrer qu'en dimension finie, tout opérateur est de Fredholm et calculer son indice. (*)

Exercice 8.2 — Montrer que A est de Fredholm si et seulement si A^* est de Fredholm et donner une relation liant $\operatorname{ind}(A)$ et $\operatorname{ind}(A^*)$. (*)

Exercice 8.3 — Que peut-on dire d'un opérateur de Fredholm qui est normal ? (*)

Exercice 8.4 — Soient A_1 et A_2 deux opérateurs de Fredholm sur H. On définit un opérateur A sur $H \oplus H$ en posant $A(x \oplus y) = A_1x \oplus A_2y$. Montrer que A est de Fredholm et calculer l'indice de A. (**)

Exercice 8.5 — Montrer que pour tout $n \in \mathbf{Z}$, il existe un opérateur $T \in \mathscr{L}(\ell_2(\mathbf{N}))$ de Fredholm tel que $\operatorname{ind}(T) = n$. (**)

Exercice 8.6 — Soit S le shift sur $\ell_2(\mathbf{N})$. Existe-t-il un opérateur $T \in \mathscr{L}(\ell_2(\mathbf{N}))$ tel que $T^2 = S$? (***)

Exercice 8.7 — Montrer la réciproque du lemme 8.13 : si $T \in \mathscr{L}(H)$ est un opérateur de Fredholm, alors il existe des décompositions $H = \mathscr{M} \oplus \mathscr{N} = \mathscr{M}' \oplus \mathscr{N}'$ tel que T admette la représentation matricielle (***)

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & X \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} : \mathscr{M} \oplus \mathscr{N} \to \mathscr{M}' \oplus \mathscr{N}',$$

où $\mathscr{N}$ et $\mathscr{N}'$ sont de dimension finie, et T_1 est inversible.

Exercice 8.8 — Montrer que si $A \in \mathscr{L}(H)$ est un opérateur de Fredholm et $K \in \mathscr{L}(H)$ est un opérateur compact, alors $A + K$ est un opérateur de Fredholm et $\operatorname{ind}(A + K) = \operatorname{ind}(A)$. (****)

Exercice 8.9 — Soit $A \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur de Fredholm. Montrer qu'il y a équivalence entre (****)
- (i) L'indice de A est nul.
- (ii) Il existe un opérateur compact K tel que $A + K$ est inversible.
- (iii) Il existe un opérateur de rang fini F tel que $A + F$ est inversible.

Exercice 8.10 — Montrer que l'ensemble $\mathcal{F}$ des opérateurs de Fredholm est un ouvert de $\mathscr{L}(H)$, et que la fonction $\operatorname{ind} : \mathcal{F} \to \mathbf{Z}$ est continue et donc localement constante. (****)