Université de la Réunion — Mathématiques
M1 Théorie des Opérateurs

Devoir Maison
à rendre pour le vendredi 15 mai.

Exercice 1

Soit $H = \ell^2(\mathbf{N})$ et S le shift défini par

$$S(x_0, x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2, \dots).$$

Calculer la norme-opérateur de $S + S^*$.

Exercice 2 (unicité de la racine carrée)

Soit H un espace de Hilbert. Si $A \in \mathscr{L}(H)$ est un opérateur auto-adjoint positif, le calcul fonctionnel continu permet de construire un opérateur $B \in \mathscr{L}(H)$, auto-adjoint positif tel que $B^2 = A$. Supposons réciproquement que $B' \in \mathscr{L}(H)$ est un opérateur auto-adjoint positif tel que $B'^2 = A$; nous allons montrer que $B' = B$.

1. Montrer que B et B' commutent.
2. Pourquoi existe-t-il des opérateurs auto-adjoint positifs C et C' tels que $C^2 = B$ et $C'^2 = B'$? Montrer que si $x \in H$ et $y = (B - B')x$, alors $\|C(y)\|^2 + \|C'(y)\|^2 = 0$.
3. Montrer que $CB = CB'$ et $C'B = C'B'$. Conclure.

Exercice 3

Soit H un espace de Hilbert complexe et $A \in \mathscr{L}(H)$. Le but de cet exercice est de montrer l'équivalence entre

(a) Il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que $\|A^N\| < 1$.

(b) Pour tout $x \in H$, la série $\sum_{n \in \mathbf{N}} \|A^n x\|$ est convergente.

1. Montrer l'implication (a) $\Longrightarrow$ (b).
2. En supposant (b), montrer que $A - \lambda \mathrm{Id}$ est injectif lorsque $|\lambda| \geqslant 1$.
3. En supposant (b), montrer que $A - \lambda \mathrm{Id}$ est surjectif lorsque $|\lambda| \geqslant 1$. Pour x_0 et u des éléments fixés de H, on pourra introduire la suite (x_k) définie par récurrence en posant
$$x_{k+1} = \frac{1}{\lambda} A(x_k) + \frac{1}{\lambda} u$$
et montrer qu'elle est convergente.
4. Montrer l'implication (b) $\Longrightarrow$ (a).

Question bonus : Donner un exemple d'opérateur A tel que $\|A^N\| = 1$ pour tout N, et $\lim_{n\to\infty} \|A^n x\| = 0$ pour tout $x \in H$.

Exercice 4 (spectre d'une perturbation compacte)

Soit H un espace de Hilbert complexe, A un opérateur sur H et K un opérateur compact sur H. Soit λ un élément de $\sigma(A) \setminus \sigma_p(A)$. Montrer qu'alors $\lambda \in \sigma(A + K)$.

Vous pouvez rendre le devoir soit en le scannant et en l'envoyant par e-mail, soit en me le postant (vous pouvez passer par l'intermédiaire du secrétariat pour ne pas payer les frais d'envoi) à l'adresse suivante

Guillaume AUBRUN
Institut Camille Jordan
Université Claude Bernard Lyon 1
43 boulevard du 11 novembre 1918
69622 Villeurbanne cedex