Polytech Lyon
M2 Statistique des processus

Examen du 3 février 2015
Les notes de cours et de TD sont autorisées.

Exercice 1. Requêtes

Dans un serveur informatique, les requêtes arrivent suivant un processus de Poisson, avec un taux de 60 requêtes par heure. Déterminer les probabilités des événements suivants :

1. L'intervalle entre les deux premières requêtes est compris entre 2 et 4 minutes.
2. Aucune requête n'arrive entre 14h et 14h05.
3. Sachant que deux requêtes sont arrivées entre 14h et 14h10, les deux sont arrivées dans les 5 premières minutes.

Exercice 2. Station-service

Une station service comporte une seule pompe à essence. Des voitures arrivent selon un processus de Poisson de taux 20 voitures par heure. Le temps de service suit une loi exponentielle d'espérance 2 minutes.

1. Donner la mesure de probabilité invariante du nombre de voitures dans la station.
2. En régime stationnaire, déterminer le temps moyen total passé à la station, puis le temps moyen d'attente avant d'être servi.

Exercice 3. Maximum d'exponentielles

Soit $V_1, \dots, V_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre égal à 1. Déterminer $\mathbf{E} \max(V_1, \dots, V_n)$ (une bonne réponse pour les petites valeurs de n donnera droit à quelques points).

Exercice 4. Vrai ou Faux

Déterminer si chacune des 6 assertions suivantes est vraie ou fausse (les réponses sont à justifier).

On se donne $(N_t)_{t \geqslant 0}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$.

(1) Le processus $(N'_t)_{t \geqslant 0}$ défini par $N'_t = N_{t/2}$ est un processus de Poisson d'intensité 2λ.

(2) Soient $a < b$ et $c < d$ des réels positifs. On a l'équivalence suivante :

$$N_b - N_a \text{ et } N_d - N_c \text{ sont indépendants} \iff]a, b[\cap]c, d[= \emptyset.$$

(3) Presque sûrement, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un temps $t \geqslant 0$ tel que $N_{t+\varepsilon} > N_t$.

On se donne $(B_t)_{t \geqslant 0}$ et $(B'_t)_{t \geqslant 0}$ deux mouvements browniens standard issus de zéro. On suppose que $(B_t)_{t \geqslant 0}$ et $(B'_t)_{t \geqslant 0}$ sont indépendants.

(4) Presque sûrement, on a $\lim_{t \to +\infty} |B_t| = +\infty$.

(5) On a $\mathbf{P}\left(B_t < B'_t \text{ pour tout } t > 0\right) = 1/2$.

(6) La variable aléatoire $\int_0^1 B_t \, dt$ suit une loi gaussienne $N(0, 1/3)$.