Polytech Lyon
M2 Statistique des processus

Examen du 10 février 2016
Les notes de cours et de TD ne sont pas autorisées.

Exercice 1. Dans un serveur informatique, les requêtes arrivent suivant un processus de Poisson, avec un taux de 60 requêtes par heure. Déterminer les probabilités des événements suivants :

1. L'intervalle entre les deux premières requêtes est compris entre 2 et 4 minutes.
2. Aucune requête n'arrive entre 14h et 14h05.
3. Sachant que trois requêtes sont arrivées entre 14h et 14h10, les trois sont arrivées dans les 5 premières minutes.

Exercice 2. On considère une chaîne de Markov à temps continu sur $E = \{1, 2, 3, 4\}$, de générateur

$$L = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Représenter la chaîne de Markov sous forme de graphe.
2. Déterminer sa mesure invariante.
3. La chaîne de Markov est-elle irréductible ?
4. La mesure invariante est-elle réversible ?

Exercice 3. Madame Jamilah, diseuse de bonne aventure, offre ses services à la fête foraine de Patelin-sur-Rhône. On suppose que les clients arrivent selon un processus de Poisson d'intensité 4 clients par heure, et que les consultations ont une durée exponentielle de moyenne 10 minutes.

1. On suppose que la longueur de la file d'attente devant la tente de Madame Jamilah est illimitée.
   (a) Dans la notation de Kendall, de quel modèle de file d'attente s'agit-il ?
   (b) Donnez le générateur du processus.
   (c) Quelle est la distribution invariante de la longueur de la file ?
   (d) Quel est le temps moyen d'attente par client ?
   (e) Quel est le nombre moyen de clients par heure ?
2. Suite à des problèmes avec le service d'ordre, les organisateurs de la fête interdisent toute file d'attente. Madame Jamilah établit alors une salle d'attente dans sa tente, avec une seule place. Toute personne arrivant alors que Madame Jamilah et la salle d'attente sont occupées repart aussitôt.
   (a) Donner le nouveau générateur du processus.
   (b) Quelle est la distribution invariante de la longueur de la file ?
   (c) Quel est le temps moyen d'attente par client ?
   (d) Quel est le nombre moyen de clients par heure ?

Exercice 4. Soit $V_1, \ldots, V_n$ des variables aléatoires i.i.d. de loi exponentielle de paramètre égal à 1. On note $V_1^\downarrow \geqslant V_2^\downarrow \geqslant \cdots \geqslant V_n^\downarrow$ le réordonnement décroissant de $(V_1, \ldots, V_n)$, de sorte que $V_1^\downarrow = \max(V_1, \ldots, V_n)$ et $V_n^\downarrow = \min(V_1, \ldots, V_n)$.

1. Quelle est la loi de $V_n^\downarrow$?
2. Pour $1 \leqslant k < n$, expliquer pourquoi $V_k^\downarrow - V_{k+1}^\downarrow$ suit une loi exponentielle d'un paramètre à déterminer.
3. Calculer $\mathbf{E}\, V_1^\downarrow$.

Exercice 5. Vrai ou Faux

Déterminer si chacune des 3 assertions suivantes est vraie ou fausse (les réponses sont à justifier brièvement).

On se donne $(N_t)_{t\geqslant 0}$ un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$.

(1) Le processus $(N'_t)_{t\geqslant 0}$ défini par $N'_t = N_{t/2}$ est un processus de Poisson d'intensité 2λ.

(2) Soient $a < b$ et $c < d$ des réels positifs. Alors $N_b - N_a$ et $N_d - N_c$ sont indépendants.

(3) Presque sûrement, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un temps $t \geqslant 0$ tel que $N_{t+\varepsilon} > N_t$.