Polytech Lyon
M2 Statistique des processus

Feuille 1
TD : Processus de Poisson

Exercice 1. Loi géométrique, loi exponentielle

1. Si $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, calculer l'espérance et la variance de Y.
2. Soit $Y_1, \ldots, Y_n$ indépendantes avec $Y_i \sim \mathcal{E}(\lambda_i)$. Quelle est la loi de $\min(Y_1, \ldots, Y_n)$?
3. Soit $X_1, \ldots, X_n$ indépendantes avec $X_i \sim \mathcal{G}(p_i)$. Quelle est la loi de $\min(X_1, \ldots, X_n)$?
4. Soit $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Quelle est la loi de la partie entière de Y ?
5. Soit (X_k) une suite de variables aléatoires, $X_k \sim \mathcal{G}(p_k)$. On suppose que $\lambda := \lim_{k\to\infty} kp_k$ existe. Montrer par un calcul de fonctions caractéristiques que X_k/k converge en loi vers $\mathcal{E}(\lambda)$.

Exercice 2. Soit (N_t) un processus de Poisson d'intensité λ. Pour $s, t \geqslant 0$, calculer la covariance de N_s et N_t.

Exercice 3. Des clients arrivent dans une banque suivant un processus de Poisson d'intensité λ. Sachant que deux clients sont arrivés dans la première heure, quelle est la probabilité que

1. Les deux soient arrivés dans les 20 premières minutes ?
2. L'un au moins soit arrivé dans les 20 premières minutes ?

Exercice 4. Dans un serveur informatique, les requêtes arrivent selon un processus de Poisson, avec un taux de 60 requêtes par heure. Déterminer les probabilités suivantes

1. L'intervalle entre les deux premières requêtes est compris entre 2 et 4 minutes.
2. Aucune requête n'arrive entre 14h et 14h05.
3. Sachant que deux requêtes sont arrivées entre 14h et 14h10, les deux sont arrivées dans les 5 premières minutes.
4. Sachant que deux requêtes sont arrivées entre 14h et 14h10, au moins une est arrivée dans les 5 premières minutes.

Exercice 5. Un serveur informatique envoie des messages selon un processus de Poisson. En moyenne, il envoie un message toutes les 30 secondes.

1. Quelle est la probabilité que le serveur n'envoie aucun message au cours des 2 premières minutes de sa mise en service ?
2. Quel est le temps moyen de l'envoi du second message ?
3. Quelle est la probabilité que le serveur n'ait pas envoyé de message durant la première minute, sachant qu'il a envoyé 3 messages au cours des 3 premières minutes.
4. Quelle est la probabilité qu'il y ait strictement moins de 3 messages au cours des 2 premières minutes, sachant qu'il y en a eu au moins 1 au cours de la première minute.

Exercice 6. L'écoulement des voitures le long d'une route est modélisé par un processus de Poisson d'intensité $\lambda = 2$ voitures par minute. À cause d'un chantier, la circulation est arrêtée alternativement dans chaque direction. On admet qu'à l'arrêt, chaque véhicule occupe une longueur de 8 mètres en moyenne.

1. On note X_n l'instant d'arrivée de la $n$ème voiture. À l'aide du théorème central limite, donner une approximation gaussienne de la loi de X_n.
2. Pendant combien de temps peut-on arrêter la circulation si l'on désire que la queue ainsi formée ne dépasse la longueur de 250m qu'avec une probabilité de 0.2 ? (La valeur de x pour laquelle $\mathbf{P}(N(0,1) < x) = 0.2$ est $x \approx -0.85$).

Exercice 7. Des greffons de foie arrivent à un bloc opératoire suivant un processus de Poisson d'intensité λ. Deux patients attendent d'être greffés, le premier (resp. le second) a une durée de vie qui suit une loi exponentielle de paramètre μ_1 (resp. μ_2). Il est entendu que le premier greffon qui arrive au bloc est pour le premier patient, s'il est encore en vie, sinon au second, s'il est encore en vie.

1. Calculer la probabilité que le premier patient soit greffé.
2. Calculer la probabilité que le second patient soit greffé.

Exercice 8. Les employés d'une entreprise arrivent au travail selon un processus de Poisson $(N_t)_{t\geqslant 0}$ d'intensité λ. Pour $i \in \mathbb{N}$, soit S_i la date d'arrivée du $i$ème employé.

1. Exprimer en fonction de (N_t) et (S_i) le nombre total $X(t)$ des heures de travail effectiées dans l'entreprise jusqu'au temps $t \geqslant 0$.
2. Calculer $\mathbf{E}\, X(t)$ en conditionnant par rapport à la valeur de N_t.

Exercice 9. Un compteur reçoit des impulsions selon un processus de Poisson $(N_t)_{t\geqslant 0}$ d'intensité λ. On suppose que l'amplitude d'une impulsion décroît avec le temps selon un taux exponentiel : si une impulsion a l'amplitude A à la date 0, alors son amplitude à la date $t > 0$ est $A\exp(-\alpha t)$. On suppose en outre que les amplitudes initiales des différentes impulsions sont indépendantes et suivent toutes la même loi qu'une variable aléatoire A d'espérance finie. Elles sont, enfin, indépendantes du processsus (N_t). On désigne par (X_i) la suite des instants d'arrivée des impulsions et par (A_i) la suite des amplitudes initiales respectives.

1. Vérifier que l'amplitude totale mesurée à la date $t > 0$ est
$$A(t) = \sum_{k=1}^{N(t)} A_k \exp(-\alpha(t - X_k)).$$
2. Calculer $\mathbf{E}\,[A(t)|N_t = n]$.
3. En déduire $\mathbf{E}\, A(t)$.

Exercice 10. À raison d'un véhicule toutes les dix secondes en moyenne, le flux des véhicules dans une rue donnée comporte une proportion 10% de camions et une proportion 90% de voitures particulières. On modélise par un processus de Poisson.

1. Quelle est la probabilité qu'au moins un camion passe dans un intervelle d'une minute ?
2. Sachant que 10 camions sont passés dans un intervalle de 5 minutes, quel est le nombre moyen de véhicules qui sont passés dans cet intervalle ?
3. 30 véhicules sont passés durant 10 minutes, quelle est la probabilité que 3 parmi eux soient des camions ?

Exercice 11. On considère un processus de Poisson $(N_t)_{t\geqslant 0}$ d'intensité λ et d'instants de saut (S_n).

1. On supprime le $k$ème saut lorsque k est impair et on note (N_t^1) le processus obtenu. Calculer $\mathbf{P}(N_t^1 = k)$. Est-ce que (N_t^1) est un processus de Poisson ?
2. Soient M_n le milieu du segment $[S_{n-1}, S_n]$ et V_n la longueur du segment $[M_{n-1}, M_n]$. Calculer les coefficients de corrélation des variables V_{n-1} et V_n, puis des variables V_{n-1} et V_{n+1}.