Polytech Lyon
M2 Statistique des processus

TD 2
Chaînes de Markov à temps continu

Exercice 1.

On considère une chaîne de Markov à temps continu (X_t) sur l'espace d'états $E = \{1, 2, 3, 4\}$, de générateur infinitésimal

$$L = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -5 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Représenter la chaîne de Markov sous forme de graphe.
2. Déterminer la mesure de probabilité invariante.
3. Le processus est-il irréductible ?

Exercice 2.

Un homme d'affaires voyage entre Paris, Bordeaux et Marseille. Il passe dans chaque ville un temps de loi exponentielle, de moyenne $1/4$ de mois pour Paris et Bordeaux, et de $1/5$ de mois pour Marseille. S'il est à Paris, il va à Bordeaux ou Marseille avec probabilité $1/2$. S'il est à Bordeaux, il va à Paris avec probabilité $3/4$ et à Marseille avec probabilité $1/4$. Après avoir visité Marseille, il retourne toujours à Paris.

1. Donner le générateur de la chaîne de Markov à temps continu décrivant l'itinéraire de l'homme d'affaires.
2. Déterminer la fraction de temps qu'il passe dans chaque ville.
3. Combien de voyages fait-il en moyenne de Paris à Bordeaux chaque année ?

Exercice 3. Un petit magasin d'informatique peut avoir au plus 3 ordinateurs en stock. Des clients arrivent avec un taux de 2 clients par semaine. Si au moins un ordinateur est en stock, le client l'achète. S'il reste au plus un ordinateur, le tenancier du magasin commande deux nouveaux ordinateurs, qui sont livrés après un temps de loi exponentielle de moyenne 1 semaine.

1. Donner le générateur du processus décrivant le nombre d'ordinateurs en stock.
2. Déterminer la distribution invariante.
3. Quel est le taux de vente d'ordinateurs ?

Exercice 4. Un cycliste peut être victime de deux types de pannes, qui se produisent selon un processus de Poisson.

- Il déraille en moyenne une fois toutes les 10 heures. Dans ce cas, il lui faut un temps exponentiel de moyenne 6 minutes pour remettre la chaîne en place.
- Il crève une chambre à air en moyenne une fois toutes les 25 heures. Il lui faut alors un temps exponentiel de moyenne 1 heure pour réparer la panne.

1. Déterminer la mesure de probabilité invariante.
2. Pendant quelle proportion du temps le cycliste peut-il rouler ?
3. Généraliser la solution au cas de N différentes pannes, chaque panne se produisant aux un taux μ_i et nécessitant un temps de réparation exponentielle de moyenne $1/\lambda_i$.

Exercice 5. Une molécule d'hémoglobine peut fixer soit une molécule de dioxygène, soit une molécule de monoxyde de carbone. On suppose que ces molécules arrivent selon des processus de Poisson de taux λ_{O_2} et λ_{CO} et restent attachées pendant des temps exponentiels de taux μ_{O_2} et μ_{CO} respectivement. Déterminer la fraction de temps passée dans chacun des trois états : hémoglobine seule, hémoglobine et oxygène, hémoglobine et dioxyde de carbone.

Exercice 6. Des voitures arrivent dans une station-service avec un taux de 20 voitures par heure. La station comporte une seule pompe. Si un conducteur trouve la pompe libre, il s'arrête pour faire le plein. L'opération lui prend un temps exponentiel de moyenne 6 minutes. Si la pompe est occupée mais qu'aucune voiture n'attend, le conducteur attend que la pompe se libère. Si par contre il y a déjà deux voitures sur place (l'une dont on fait le plein et l'autre qui attend), la voiture qui arrive repart aussitôt.

1. Formuler le problème comme une chaîne de Markov à temps continu, et trouver sa mesure de probabilité invariante.
2. Déterminer le nombre moyen de clients servis par heure.