Polytech Lyon
M2 Statistique des processus

TD 3
Files d'attente

Exercice 1.

Une station-service comporte une seule pompe à essence. Des voitures arrivent selon un processus de Poisson de taux 20 voitures par heure. Le temps de service suit une loi exponentielle d'espérance 2 minutes.

1. Donner la distribution invariante du nombre de voitures dans la station.
2. Déterminer le temps d'attente moyen avant d'être servi, et le temps de séjour total.
3. Quelle proportion des voitures doit attendre avant de pouvoir faire le plein ? Quelle proportion doit attendre plus de 2 minutes ?

Exercice 2.

Madame Jamilah, diseuse de bonne aventure, offre ses services à la fête foraine de Patelin-sur-Rhône. On suppose que les clients arrivent selon un processus de Poisson d'intensité 4 clients par heure, et que les consultations ont une durée exponentielle de moyenne 10 minutes.

1. On suppose que la longueur de la file d'attente devant la tente de Madame Jamilah est illimitée. Calculer
   (a) la distribution invariante de la longueur de la file,
   (b) le temps moyen d'attente par client,
   (c) le nombre moyen de clients par heure.
2. Suite à des problèmes avec le service d'ordre, les organisateurs de la fête interdisent toute file d'attente. Madame Jamilah établit alors une salle d'attente dans sa tente, avec une seule place. Toute personne arrivant alors que Madame Jamilah et la salle d'attente sont occupées repart aussitôt. Déterminer
   (a) la distribution invariante de la longueur de la file,
   (b) le temps moyen d'attente par client,
   (c) le nombre moyen de clients par heure.

Exercice 3.

Des appels arrivent dans un central téléphonique selon un processus de Poisson de taux λ. Il y a s lignes disponibles, et les appels ont une durée exponentielle de moyenne $1/\mu$. Un appel arrivant alors que toutes les lignes sont occupées est refusé.

1. Calculer la distribution invariante.
2. Calculer la probabilité qu'un appel soit rejeté.

Exercice 4.

Les clients arrivent dans un salon de coiffure selon un processus de Poisson de taux 5 clients par heure. On suppose qu'il y a un seul coiffeur, qui met un temps exponentiel de moyenne un quart d'heure pour coiffer un client. La salle d'attente comporte deux chaises. Si un client arrive et que toutes les chaises sont occupées, il repart.

1. Calculer la distribution invariante.
2. Quelle est la probabilité qu'un client qui arrive soit servi instantanément.
3. Vous avez besoin impératif d'être coiffé, et vous êtes prêt à attendre debout. Quel est votre temps d'attente moyen ?
4. Quel est le nombre moyen de clients servis par heure ?
5. On suppose maintenant qu'il y a deux coiffeurs. Chacun met un temps exponentiel de moyenne une demi-heure pour s'occuper d'un client. Calculer le nombre moyen de clients servis par heure.

Exercice 5.

Le but du problème est de comparer deux types de files d'attente à deux serveurs.

Dans le premier cas, les clients forment une seule file et choisissent le premiers serveur qui se libère (file M/M/2). On suppose que les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux λ, et qu'ils sont servis pendant un temps exponentiel de paramètre $\mu = \lambda$.

1. Déterminer la distribution invariante π de la file.
2. Quelle est la probabilité qu'un client ne doive pas attendre d'être servi ?
3. Quel est le temps d'attente moyen avant d'être servi ?
4. Soit S le nombre de serveurs occupés. Déterminer $\mathbf{E}_\pi S$.

Dans le second cas, il y a une file distincte devant chaque serveur. Les clients choisissent une file ou l'autre avec probabilité $1/2$.

5. Expliquer pourquoi du point de vue du client, ce cas est équivalent à une file M/M/1 avec taux $\lambda/2$ et λ.
6. Déterminer la distribution invariante π' de la file.
7. Quelle est la probabilité qu'un client ne doive pas attendre d'être servi ?
8. Quel est le temps d'attente moyen avant d'être servi ?
9. Déterminer $\mathbf{E}_{\pi'} S$.
10. Comparer les deux systèmes.

Exercice 6.

Soient $\lambda, \mu > 0$. On considère la chaîne de Markov à temps continu sur $E = \{0, \dots, N\}$ dont les taux de transition non nuls sont donnés par $q(0,i) = \lambda$ et $q(i,0) = \mu$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant N$.

1. Donner le générateur L de la chaîne de Markov.
2. Déterminer la mesure invariante π.
3. Est-elle réversible ?
4. On considère $N = 1$. Calculer L^n pour tout n, et en déduire le noyau de transition P_t pour tout $t \geqslant 0$.
5. On considère le cas $N > 1$, avec $\lambda = \mu$. Pour tout $j \in E$ on pose

$$Q_t(j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} P_t(k,j).$$

   À l'aide des équations de Chapman–Kolmogorov, exprimer $\frac{d}{dt} P_t(0,j)$ et $\frac{d}{dt} Q_t(j)$. Á l'aide de la question 4, en déduire $P_t(0,j)$ et $Q_t(j)$ pour tout $j \in E$ (on traitera d'abord le cas $j = 0$).
6. Soit $i \in \{1, \dots, N\}$. Calculer $\frac{d}{dt} P_t(i,j)$ et en déduire $P_t(i,j)$ pour tout $j \in E$ (on traitera d'abord le cas $j = 0$).
7. Que vaut $\lim_{t\to\infty} P_t$?