

TP 1
Processus de Poisson

Exercice 1. Simulation d'un processus de Poisson

1. Écrire une fonction `poisson(t,lambda)` qui renvoie la liste des temps de saut d'une réalisation d'un processus de Poisson d'intensité λ entre les temps 0 et t . On utilisera la caractérisation des temps de sauts à l'aide des statistiques d'ordre de la loi uniforme.
2. Écrire une fonction `tracepoisson(t,lambda)` qui trace le graphe d'une réalisation d'un processus de Poisson d'intensité λ sur $[0, t]$.
3. Écrire une fonction `poisson2(t,lambda)` qui fait la même chose que `poisson` en utilisant la définition d'un processus de Poisson.
4. Comparer les temps d'exécution des fonctions `poisson` et `poisson2`.
5. Vérifier que les temps inter-sauts du processus produit par la fonction `poisson` sont distribués selon une loi exponentielle.

Exercice 2. Superposition et amincissement

1. Vérifier expérimentalement la propriété de superposition des processus de Poisson.
2. Vérifier expérimentalement la propriété d'amincissement des processus de Poisson.
3. Vérifier expérimentalement que le processus obtenu à partir d'un processus de Poisson en supprimant les sauts d'indice impair (le premier, troisième, cinquième ... sauts) n'est pas un processus de Poisson.

Exercice 3. Comportement asymptotique

Pour un processus de Poisson (N_t) d'intensité λ , on a les comportements asymptotiques suivants

- Loi des grands nombres : quand t tend vers l'infini, le quotient N_t/t tend p.s. vers λ .
- Théorème central limite : quand t tend vers l'infini, on a convergence en loi

$$\sqrt{\frac{t}{\lambda}} \left(\frac{N_t}{t} - \lambda \right) \rightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

Pour λ choisi aléatoirement dans $[1, 2]$, écrire une fonction qui trace (en fonction du temps)

- λ
- l'estimation de λ
- un intervalle de confiance asymptotique à 95 %

Exercice 4.

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite (indexée par \mathbb{Z}) de variables aléatoires indépendantes, avec $X_n \sim N(n, \sigma^2)$. On note, pour $t \geq 0$,

$$N_t = \#\{n \in \mathbb{Z} : X_n \in [0, t]\}.$$

Déterminer expérimentalement s'il est vrai que le processus $(N_t)_{t \geq 0}$ converge vers un processus de Poisson lorsque σ tend vers l'infini.