Polytech Lyon
M2 Statistique des processus

**TP 2**
Processus de Poisson, chaînes à temps continu

# Processus de Poisson

**Exercice 1. Paradoxe de l'autobus**
Vérifier expérimentalement le paradoxe de l'autobus.

**Exercice 2. Processus de Poisson dans le plan**

1. Simuler un processus de Poisson 2-dimensionnel d'intensité $\lambda = 100$ dans le carré $[0,1] \times [0,1]$.
2. Soient $D_1$ et $D_2$ les sous-ensembles disjoints définis comme suit : $D_1$ est le disque de centre $(0.2, 0.6)$ et de rayon 0.2, et $D_2$ est le triangle défini par $y \leqslant x$. Soient $N_1, N_2$ les nombres de points du processus dans $D_1, D_2$. Que prédit la théorie ? Vérifier que $N_1$ et $N_2$ sont non corrélés.
3. Comparer avec le cas où l'on tire 100 points i.i.d. de loi uniforme dans le carré $[0,1] \times [0,1]$. S'attend-on à ce que $N_1$ et $N_2$ soient positivement ou négativement corrélés ?

**Exercice 3. Droites aléatoires**
On propose de tirer au hasard une famille de droites dans le plan. On représente pour cela toute droite $D$ par son équation normale $x\cos\theta + y\sin\theta - p = 0$, où $\theta \in [0, 2\pi[$ est l'angle polaire de la normale à $D$ et $p > 0$ la distance de d'origne à $D$. On suppose que les points $(p, \theta)$ associés à la famille de droites aléatoires constituent une réalisation d'un processus de Poisson d'intensité constante 1 sur $[0, +\infty[\times[0, 2\pi]$.

1. Représenter l'intersection du carré $[-A, A]^2$, où $A$ est un réel donné, avec les droites de ce processus.
2. Soit $(x_0, y_0)$ un point quelconque de $\mathbb{R}^2$. Vérifier que les distances de ces droites à $(x_0, y_0)$ constituent une réalisation d'un processus de Poisson $2\pi$.

**Exercice 4.**
Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite (indexée par $\mathbb{Z}$) de variables aléatoires independantes, avec $X_n \sim N(n, \sigma^2)$. On note, pour $t \geqslant 0$,

$$N_t = \#\{n \in \mathbb{Z} \ : \ X_n \in [0, t]\}.$$

Déterminer expérimentalement s'il est vrai que le processus $(N_t)_{t\geqslant 0}$ converge vers un processus de Poisson lorsque $\sigma$ tend vers l'infini.

**Exercice 5. Intensité variable**
Soit $\lambda : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction continue. Ecrire un programme qui produit une simulation d'un processus de Poisson d'intensité variable $\lambda(t)$. On étudiera en particulier les fonctions

1. $\lambda(t) = t$,
2. $\lambda(t) = 1 + \sin(t)$.

# Chaînes de Markov à temps continu

**Exercice 6.** Écrire une fonction `markov(n,L,x0)` qui renvoie les $n$ premiers états visités par une chaîne de Markov à temps continu de générateur $L$ et d'état initial $x_0$, ainsi que les temps de séjour, à l'aide de la représentation par horloges exponentielles.

**Exercice 7.** A l'aide de la fonction définie à l'exercice précédant, tracer le graphe de $(X_t)_{t\geqslant 0}$, chaîne de Markov à temps continu de générateur

$$L = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ \lambda & -\lambda & 0 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \tag{1}$$

avec les choix $\lambda = 1, \lambda = 10, \lambda = 1/10$ qui permettront de comparer visuellement les temps de séjour dans l'état 2.

**Exercice 8.** Vérifier numériquement que la proportion du temps passée dans chacun des états est donnée par la mesure de probabilité invariante dans le cas de la matrice $L$ donnée par (1).