ENS Lyon
M1 Probabilités

Mathématiques

Feuille d'exercices numéro 1
Espérance conditionnelle.

Dans toute la feuille d'exercices, on travaille sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Dans toute (in)égalité faisant intervenir l'espérance conditionnelle, la mention «presque sûrement» est sous-entendue.

Exercice 1 Le cas d'une tribu discrète

Soit $\mathscr{B}$ la tribu engendrée par une partition finie $(A_1, \ldots, A_n)$ de Ω. Écrire une formule donnant $\mathbb{E}[X \mid \mathscr{B}]$.

Exercice 2 Indépendance avant ou après conditionnement ?

Soit X, Y deux variables aléatoires indépendantes de loi de Bernouilli de paramètre p, et $\mathscr{B}$ la sous-tribu engendrée par l'événement $\{X + Y = 0\}$. Calculer $\mathbb{E}[X \mid \mathscr{B}]$ et $\mathbb{E}[Y \mid \mathscr{B}]$. Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 Espérance conditionnelle et indépendance

Soient X et Y deux variables aléatoires telles que X, Y et XY soient dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) et montrer que les implications réciproques ne sont pas vraies.

(1) X et Y sont indépendantes.

(2) $\mathbb{E}[Y \mid X] = \mathbb{E}\, Y$.

(3) $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\, \mathbb{E}(Y)$.

Exercice 4 Deux espérances conditionnelles ne commutent pas

Donner un exemple (par exemple avec $\Omega = \{a, b, c\}$) d'une variable aléatoire X et de deux sous-tribus $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ pour lesquelles

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathscr{B}_2] \mid \mathscr{B}_1] \neq \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathscr{B}_1] \mid \mathscr{B}_2].$$

Exercice 5 Conditionnement et somme i.i.d.

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. intégrables, et $S = X_1 + \cdots + X_n$.

Calculer $\mathbb{E}[S \mid X_1]$ et $\mathbb{E}[X_1 \mid S]$.

Exercice 6 Calculs explicites.

Soit un couple (X, Y) de variables aléatoires ayant pour loi jointe la loi de densité

$$x(y - x)e^{-y}\mathbf{1}_{\{0 \leqslant x \leqslant y\}}.$$

Calculer $\mathbb{E}[X \mid Y]$ et $\mathbb{E}[Y \mid X]$.

Exercice 7 Inégalité de Markov conditionnelle

Soit $\mathscr{B} \subset \mathcal{F}$ une sous-tribu. Montrer l'inégalité suivante pour toute variable aléatoire X positive et tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}[X \geqslant t \mid \mathscr{B}] \leqslant \frac{1}{t}\, \mathbb{E}[X \mid \mathscr{B}].$$

Exercice 8 Inégalité de Cauchy–Schwartz conditionnelle

Soit $\mathscr{B} \subset \mathcal{F}$ une sous-tribu. Montrer que pour toutes variables aléatoires X, Y dans $L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on a

$$|\mathbb{E}[XY \mid \mathscr{B}]| \leqslant \left(\mathbb{E}\left[X^2 \mid \mathscr{B}\right]\right)^{1/2} \left(\mathbb{E}\left[Y^2 \mid \mathscr{B}\right]\right)^{1/2}.$$

Exercice 9 Variance conditionnelle

Si $\mathscr{B} \subset \mathcal{F}$ est une sous-tribu, et $X \in L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on définit la variance conditionnelle de X sachant $\mathscr{B}$ par

$$\operatorname{Var}[X \mid \mathscr{B}] = \mathbb{E}\left[X^2 \mid \mathscr{B}\right] - \mathbb{E}[X \mid \mathscr{B}]^2.$$

Montrer que

$$\operatorname{Var} X = \mathbb{E} \operatorname{Var}[X \mid \mathscr{B}] + \operatorname{Var} \mathbb{E}[X \mid \mathscr{B}].$$

Exercice 10 Somme d'un nombre aléatoire de variables aléatoires

Soit (Y_n) une suite de variables aléatoires i.i.d. d'espérance μ et de variance $\sigma^2 < +\infty$. Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbf{N}$, indépendante de (Y_n) et telle que $\mathbb{E}\, N < +\infty$. On pose

$$X = Y_1 + \cdots + Y_N.$$

1. Calculer $\mathbb{E}\,[\, X \mid N \,]$.
2. Calculer $\mathbb{E}\, X$.
3. En supposant $\mathbb{E}\, N^2 < +\infty$, montrer la formule suivante

$$\operatorname{Var} X = \sigma^2\, \mathbb{E}\, N + \mu^2 \operatorname{Var} N.$$

(Pour se rappeler la formule on peut penser aux deux cas particuliers où Y_1 ou N est constante).

Exercice 11 Le cas d'un vecteur gaussien

Soit $(X, Y_1, \ldots, Y_n)$ un vecteur gaussien et $\mathscr{B} = \sigma(Y_1, \ldots, Y_n)$. Soit $F \subset L^2(\Omega, \mathscr{B}, \mathbb{P}) \subset L^2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ le sous-espace (de dimension finie) engendré par les constantes et par $Y_1, \ldots, Y_n$. Si on note P_F la projection othogonale sur F, montrer que

$$\mathbb{E}\,[\, X \mid \mathscr{B} \,] = P_F X.$$

Exercice 12 Versions conditionnelles des théorèmes d'intégration

Énoncer et démontrer la version conditionnelle du théorème de convergence montone, du lemme de Fatou et du théorème de convergence dominée.

Exercice 13 L'espérance conditionnelle modifie nécessairement la loi.

Soit $\mathscr{B} \subset \mathcal{F}$ une sous-tribu, et soit Y une variable aléatoire dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $\mathbb{E}\,[\, Y \mid \mathscr{B} \,]$ ait la même loi que Y. Montrer que Y est en fait dans $L^1(\Omega, \mathscr{B}, \mathbb{P})$.

Remarque : *C'est beaucoup plus facile si on suppose* $Y \in L^2$.

Exercice 14

Soient X, Y deux variables aléatoires dans $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vérifiant $\mathbb{E}\,[\, X \mid Y \,] = Y$ et $\mathbb{E}\,[\, Y \mid X \,] = X$. Montrer que $X = Y$ p.s.