ENS Lyon — Mathématiques
M1 Probabilités

Feuille d'exercices numéro 2
Chaînes de Markov.

Dans toute la feuille d'exercices, on se donne une matrice de transition Q sur un ensemble fini ou dénombrable E. On suppose que $(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition Q.

Exercice 1 Montrer que les deux définitions données en cours de "$(X_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaîne de Markov de matrice de transition Q" sont équivalentes.

Exercice 2 Déterminer si les processus suivants sont des chaînes de Markov, et si oui donner leur matrice de transition.

1. $(X_{kn})_{n\geqslant 0}$, où $k \in \mathbf{N}^*$,
2. $(X_{n+1})_{n\geqslant 0}$,
3. $(X_n, X_{n+1})_{n\geqslant 0}$, à valeurs dans $E \times E$.
4. $(X_n + X_{n+1})_{n\geqslant 0}$, en supposant que $(E, +)$ est un groupe commutatif.
5. $f(X_n)$, où f est une fonction de E vers un ensemble fini ou dénombrable F.

Exercice 3 Notation matricielle

1. Soit μ la loi de X_0, que l'on assimile au vecteur ligne $(\mu(\{i\}))_{i\in E}$. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, μQ^n est la loi de X_n.
2. Soit f une fonction de E dans $\mathbf{R}$, que l'on assimile au vecteur colonne $(f(i))_{i\in E}$. Montrer que pour tout $n \geqslant 0$, on a
$$\mathbb{E}\, f(X_n) = \mu Q^n f.$$

Exercice 4 Cimetière

On rajoute à E un point extérieur ∂ pour former $\tilde{E} = E \cup \{\partial\}$. Soit T une variable aléatoire géométrique de paramètre $\lambda \in [0, 1[$, indépendante de $(X_n)_{n\geqslant 0}$. On rappelle que cette loi est caractérisée par $\mathbb{P}(T = k) = (1-\lambda)\lambda^k$. On construit le processus $(Y_n)_{n\geqslant 0}$ défini par

$$Y_n = \begin{cases} X_n & \text{si } n < T \\ \partial & \text{si } n \geq T \end{cases}.$$

Le processus $(Y_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est-il une chaîne de Markov ? Si oui, expliciter sa matrice de transition. Et si l'on remplace T par $T+1$ ou par $T+2$?

Exercice 5 Réaliser concrètement une chaîne de Markov

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité sur lequel est définie une suite i.i.d. (Z_n) de variables aléatoires de loi uniforme sur $[0, 1]$. Comment feriez-vous pour constuire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ une suite (X_n) qui soit une chaine de Markov de matrice de transition Q et de loi initiale prescrite ?

Exercice 6 Soit $p \in]0, 1[$, et considérons la chaîne de Markov d'espace d'états $\mathbf{Z}$ et de matrice de transition

$$Q(i,j) = \begin{cases} p & \text{si } j = i+1 \\ 1-p & \text{si } j = i-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette chaîne est-elle irréductible ? Classifier les états.

Exercice 7 On considère la chaîne de Markov sur l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 10\}$ donnée par la matrice de transition suivante (les éléments nuls ne sont pas indiqués).

$$Q = \begin{array}{c|cccccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
\hline
1 & & & & & & & 0.5 & & 0.5 & \\
2 & & 0.9 & & 0.1 & & & & & & \\
3 & & & & & 0.2 & & & 0.8 & & \\
4 & & 1 & & & & & & & & \\
5 & & 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 & & & & & 0.2 \\
6 & 0.4 & & & & 0.6 & & & & & \\
7 & 0.1 & & & & & & & & 0.9 & \\
8 & & & 1 & & & & & & & \\
9 & & & & & & & 0.5 & & 0.5 & \\
10 & & & & & & & & & & 1
\end{array}$$

Classifier les états.

Exercice 8 Soit $S = \{1, \ldots, 6\}$. Compléter la matrice suivante pour qu'elle soit une matrice de transition

$$Q = \begin{bmatrix} \cdot & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & \cdot & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdot & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & \cdot & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & \cdot \end{bmatrix}.$$

Classifier les états et montrer qu'il existe deux ensembles fermés irréductibles non vides C_1, C_2. Pour $i = 1, 2$ et $x \in S$, calculer

$$\mathbb{P}_x(X_n \in C_i \text{ pour tout } n \text{ assez grand}).$$

Exercice 9 Sur l'ensemble $S = \{0, 1, \ldots, n\}$ on considère la chaîne de Markov de matrice de transition Q donnée pour $0 \leqslant x \leqslant n - 1$ par

$$Q(x, y) = \begin{cases} p & \text{si } y = x + 1 \\ 1 - p & \text{si } y = 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

l'état n étant absorbant (i.e. $Q(n, x) = \delta_{n,x}$). Classifier les états de cette chaîne. Soit τ le temps d'atteinte de l'état n. Quelle est la valeur de $\mathbb{E}_x\, \tau$?

Application : combien de lancers d'un dé à 6 faces faut-il faire en moyenne pour voir apparaître 4 fois consécutivement le nombre 6 ?

Exercice 10 Classifiez, en fonction des paramètres α, β et (p_k), les états de la chaîne de Markov sur $\mathbf{N}$ dont la matrice de transition est donnée par

$$\begin{array}{lll}
Q(0,0) = \alpha, & Q(0,1) = 1 - \alpha, & 0 < \alpha < 1 \\
Q(1,2) = \beta, & Q(1,3) = 1 - \beta, & 0 < \beta < 1 \\
Q(k,1) = p_k, & Q(k,k+2) = q_k = 1 - p_k, & 0 < p_k < 1, k \geqslant 2.
\end{array}$$