ENS Lyon
M1 Probabilités

Mathématiques

**Feuille d'exercices numéro 4**
Théorème de Perron–Frobenius

Le but de cette feuille sera de prouver le théorème de Perron–Frobenius, dont nous donnons un énoncé.

**Théorème de Perron–Frobenius :** Soit $n \geq 1$ et $Q \in M_d(\mathbf{R}_+)$ une matrice stochastique. On notera $Q^n = (q_{i,j}^{(n)})_{(i,j)\in\{1,\dots,d\}^2}$. On suppose $Q$ irréductible Alors la période au point $i$, à savoir $p_i = \mathrm{pgcd}\{n \geq 0, q_{i,i}^{(n)} > 0\}$, ne dépend pas de $i$. On la note $p$ et on l'appelle la période de $Q$.

- Le rayon spectral de $Q$ est 1. Les valeurs propres de $Q$ de module 1 sont exactement les racines $p$-èmes de l'unité, et sont valeurs propres simples.
- Le spectre de $Q$ est invariant par rotation d'angle $2\pi/p$.

### 0. Préliminaires

On admet (vu en cours) l'existence d'une mesure de probabilité invariante $\mu$, écrite sous forme d'un vecteur ligne $\big(\mu(\{1\}), ..., \mu(\{d\})\big)$.

1. Montrer que pour tout $i$, on a $\mu(\{i\}) > 0$.
2. Soit $D$ la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont $\mu(\{1\})$, $\mu(\{2\})$, ..., $\mu(\{d\})$, qui est donc inversible. Montrer que $D^{-1}Q^tD$ est une matrice stochastique.

### I. L'espace propre associé à la valeur propre 1

On note $\mathbf{1}$ le vecteur colonne ne contenant que des 1. On rappelle que $\mathbf{1}$ est un vecteur propre de $Q$ associé à la valeur propre 1.

1. Montrer que le rayon spectral de $Q$ (la plus grande norme des valeurs propres complexes de $Q$) est 1.
2. Si $X = (x_i)$ et $Y = (y_i)$ sont des vecteurs colonnes à coefficients réels, on note $X \geq Y$ si pour tout $1 \leq i \leq d$, on a $x_i \geq y_i$. Soit $X$ un vecteur positif ($X \geq 0$) vérifiant $QX \geq X$. Montrer que $QX = X$, puis montrer que si $X \neq 0$, alors toutes les composantes de $X$ sont non-nulles.
3. Si $Z = (z_i)$ est un vecteur propre (complexe) associé à une valeur propre de module 1, montrer que $|Z| = (|z_i|)$ est un vecteur propre positif associé à la valeur propre 1. Puis, montrer que l'espace propre associé à la valeur propre 1 est la droite engendrée par $\mathbf{1}$.

### II. Les autres valeurs propres de norme 1.

Soit $Z = (z_i)$ un vecteur propre complexe associé à une valeur propre $\lambda$ de module 1.

1. Vérifier que $|z_i|$ est indépendant de $i$, et en déduire que, quitte à multiplier $Z$ par une constante non nulle, on peut supposer $z_1 = 1$.
2. Montrer que si $q_{i,j} > 0$, alors $z_j = \lambda z_i$.
3. En déduire que $\lambda$ est une racine $p$-ème de l'unité.
4. Réciproquement, soit $\lambda$ une racine $p$-ème de l'unité. On définit le vecteur $Z^{(\lambda)} = (z_i^{(\lambda)})$ par $z_1^{(\lambda)} = 1$ et $z_i^{(\lambda)} = \lambda^k$ si $q_{1,i}^{(k)} \neq 0$.
5. Justifier que le vecteur $Z^{(\lambda)}$ est bien défini, et est un vecteur propre associé à la valeur propre $\lambda$.
6. Soit $\Delta$ la matrice diagonale de coefficients diagonaux $z_i^{(\lambda)}$. Montrer que l'on a
$$\Delta^{-1}Q\Delta = \lambda Q$$
et que le spectre de $Q$ est invariant par rotation d'angle $2\pi/p$.

### III. Simplicité algébrique des valeurs propres de module 1

On note $P$ la transposée de la comatrice de $I_d - Q$.

1. Montrer que la dérivée du polynôme caractéristique de $Q$ en 1 est la trace de $P$.
2. Montrer que chaque colonne de $P$ est un multiple de $\mathbf{1}$.
3. Montrer que chaque ligne de $P$ est un multiple de $\mu$. *(indice : penser aux préliminaires...)*
4. Montrer que $P$ n'est pas la matrice nulle, et en déduire que tous ses termes sont non-nuls et de même signe.
5. En déduire que 1 est valeur propre simple de $Q$.