ENS Lyon | Mathématiques
M1 Probabilités

**Feuille d'exercices numéro 5**
Temps d'arrêt

**Exercice 1**
Soient $S$ et $T$ deux temps d'arrêt. Montrer que $S \wedge T = \min(S,T)$ et $S \vee T = \max(S,T)$ sont aussi des temps d'arrêt.

**Exercice 2**
Soient $S$ et $T$ deux temps d'arrêt. Est-ce que $S+T$ est un temps d'arrêt ?

**Exercice 3**
Soit $(Y_n)$ une suite de variables aléatoires telle que, pour tout $n$, $Y_n$ est $\mathcal{F}_n$-mesurable. Soit $T$ un temps d'arrêt fini presque sûrement. Montrer que $Y_T \in \mathcal{F}_T$.

**Exercice 4**
Soient $S$ et $T$ deux temps d'arrêt tels que $S \leqslant T$. Montrer que $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

**Exercice 5**
Soient $T_1$ et $T_2$ deux temps d'arrêt tels que $T_1 \leqslant T_2$, et $A \in \mathcal{F}_{T_1}$. On définit $T$ par

$$T(\omega) = \begin{cases} T_1(\omega) & \text{si } \omega \in A \\ T_2(\omega) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que $T$ est un temps d'arrêt.

**Exercice 6 La propriété de Markov forte ne caractérise pas les temps d'arrêt.**
Soit $(X_n)$ la marche aléatoire simple sur $\mathbf{Z}$ issue de 0, et

$$T := \inf\{n \geqslant 1, X_{n+1} - X_n = X_1\}.$$

Montrer que $(X_{T+n} - X_T)_{n\geqslant 0}$ suit la même loi que $(X_n)_{n\geqslant 0}$, bien que $T$ ne soit pas un temps d'arrêt. Pouvez-vous trouver un autre exemple où de plus $(X_{T+n} - X_T)_{n\geqslant 0}$ ne dépende pas de $X_T$ ? Ne dépende pas de $(X_{T-k}, X_{T-k+1}, ..., X_T)$, pour un $k$ donné ?

**Exercice 7 Identité de Wald**
Soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires i.i.d. dans $L^1$, et $T$ un temps d'arrêt pour la suite $(X_n)$ tel que $\mathbf{E}T < \infty$. Montrer que

$$\mathbf{E}\left[\sum_{n=1}^{T} X_i\right] = \mathbf{E}T\,\mathbf{E}X_1.$$

**Indication :** *traiter d'abord le cas où les variables sont positives.*

**Exercice 8 On ajoute des nombres dans $[0,1]$ jusqu'à dépasser 1.**
Soit $(X_n)$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$. Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Soit le temps d'arrêt $T = \inf\{n \text{ t.q. } S_n > 1\}$. Montrer que

1. $\mathbf{P}(T > n) = 1/n!$,
2. $\mathbf{E}T = e$,
3. $\mathbf{E}S_T = e/2$.

**Exercice 9 Dernier sommet visité par la marche aléatoire sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$**
Soit $p \geqslant 1$, $G$ le graphe cyclique à $p$ sommets et $x$ un sommet de $G$. On considère la marche aléatoire $(X_n)$ sur $G$, issue de $x$.

1. Montrer que $T = \inf\{n : \operatorname{card}\{X_0, \cdots, X_n\} = p\}$ est un temps d'arrêt pour la suite $(X_n)$.
2. Montrer que $T$ est fini presque sûrement.
3. Déterminer la loi de $X_T$.