ENS Lyon Mathématiques
M1 Probabilités

Feuille d'exercices numéro 6

Chaînes de Markov : exercices supplémentaires

Exercice 1 Les temps d'atteinte comme une distance

Soit une matrice de transition sur un espace d'états S, et (X_n) la chaîne de Markov associée, définie sur son espace canonique. On suppose que la chaîne de Markov est irréductible et récurrente positive. Le temps d'atteinte d'un état $x \in S$ est noté $T_x = \inf\{n \geqslant 0 \text{ t.q. } X_n = x\}$. Pour x, y dans S, on définit

$$d(x,y) = \mathbf{E}_x T_y + \mathbf{E}_y T_x$$

Montrer que d est une distance sur S, c'est-à-dire qu'elle vérifie les axiomes suivants pour $x, y, z \in S$

1. $d(x,y) < +\infty$,
2. $x = y \iff d(x,y) = 0$,
3. $d(x,y) = d(y,x)$,
4. $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

Exercice 2

Soit $(U_k)_{k\geq 1}$ une suite de variables i.i.d telle que $\mathbf{P}(U_1 = -1) = \mathbf{P}(U_1 = 1) = 1/2$. On définit un processus $(X_k)_{k\geqslant 0}$ à valeurs dans $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ par récurrence par $X_0 = X_1 = 0$ et, pour $k \geqslant 1$,

$$X_{k+1} = 2X_k - X_{k-1} + U_k.$$

1. Calculer l'espérance de $T := \inf\{k > 0 \,:\, X_k = X_{k+1} = 0\}$.
2. Si n est impair, montrer que la loi de X_k converge vers la mesure de probabilité uniforme sur $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.
3. Si n est pair, montrer que X_{4k} et X_{4k+1} convergent en loi vers la mesure uniforme sur les nombres pairs de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ tandis que X_{4k+2} et X_{4k+3} convergent en loi vers la mesure uniforme sur les nombres impairs.

Indication : *Montrer que le processus défini par $Y_k = (X_k, X_{k+1})$ est une chaîne de Markov irréductible, déterminer sa mesure de probabilité invariante et étudier sa période.*

Exercice 3 Temps de mélange

Soit Q une matrice de transition irréductible et apériodique sur un ensemble fini S. On note π l'unique mesure de probabilité invariante. Pour $n \in \mathbf{N}$, on introduit

$$d(n) = \max_{x\in S} \|P^n(x,\cdot) - \pi\|_{TV} \quad \text{et} \quad \overline{d}(n) = \max_{x,y\in S} \|P^n(x,\cdot) - P^n(y,\cdot)\|_{TV}.$$

1. Montrer les inégalités
$$d(n) \leqslant \overline{d}(n) \leqslant 2d(n).$$
2. Montrer que $\overline{d}$ est une fonction sous-multiplicative
$$\overline{d}(m+n) \leqslant \overline{d}(m)\overline{d}(n).$$
3. Montrer que d et $\overline{d}$ sont des fonctions décroissantes.
4. Soit $\varepsilon > 0$. On introduit $t_{mix}(\varepsilon) = \min\{t \,:\, d(t) \leqslant \varepsilon\}$. Montrer que
$$t_{mix}(\varepsilon) \leqslant \lceil \log_2(\varepsilon^{-1}) \rceil t_{mix}(1/4).$$
On appelle $t_{mix}(1/4)$ le temps de mélange de la chaîne de Markov associée à Q.
5. Soit Q la matrice de transition sur $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ vérifiant $Q(i,i) = 1/2$ et $Q(i,i+1) = Q(i,i-1) = 1/4$. Quel est l'ordre de grandeur (quand p tend vers l'infini) du temps de mélange de la chaîne de Markov associée ?

Exercice 4

Soit Q une matrice de transition sur un ensemble dénombrable S. On note (X_n) la chaîne de Markov associée à Q, que l'on suppose définie sur l'espace canonique. On suppose que (X_n) est irréductible et qu'il existe un sous-ensemble fini $F \subset S$, tel que pour tout $x \in F$, on ait $\mathbf{E}_x \tau_F < +\infty$, où l'on note

$$\tau_F = \inf\{n > 0 \,:\, X_n \in F\}.$$

1. On définit par récurrence une suite $(\tau_F^{(k)})_{k \in \mathbf{N}}$ par $\tau_F^{(0)} = 0$, $\tau_F^{(1)} = \tau_F$, et pour $k \in \mathbf{N}^*$,

$$\tau_F^{(k+1)} = \inf\{n > \tau_F^{(k)} \,:\, X_n \in F\}.$$

   Montrer que pour tout $k \in \mathbf{N}$, la v.a. $\tau_F^{(k)}$ est un temps d'arrêt.
2. Montrer que pout tout $x \in F$ et pour tout $k \in \mathbf{N}$, $\mathbf{P}_x(\tau_F^{(k)} < +\infty) = 1$.
3. On pose $Y_k = X_{\tau_F^{(k)}}$. Montrer que (Y_k) est une chaîne de Markov sur l'espace d'états F, et que cette chaîne est irréductible et récurrente positive.
4. Pour $x \in F$, on pose

$$\tau_x = \inf\{n > 0 \,:\, X_n = x\}.$$
$$\sigma_x = \inf\{k > 0 \,:\, Y_k = x\}.$$

   Montrer que

$$\tau_x = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\tau_F^{(k+1)} - \tau_F^{(k)}\right) \mathbf{1}_{\{\sigma_x > k\}}.$$

5. Montrer l'inégalité

$$\mathbf{E}_x \tau_x \leqslant \left(\sup_{y \in F} \mathbf{E}_y \tau_F\right) \mathbf{E}_x \sigma_x$$

6. En déduire que la chaîne (X_n) est récurrente positive.

Exercice 5 Soit Q une matrice de transition sur un ensemble fini ou dénombrable S. On fixe $x_0 \in S$, et on se donne une suite $(X_n)_{n \geqslant 0}$ de loi $Markov(Q, x_0)$. On fait l'hypothèse que $Q(x,x) < 1$ pour tout $x \in S$.

1. On définit une suite $(\sigma_k)_{k \geqslant 0}$ de variables aléatoires de la façon suivante : $\sigma_0 = 0$, et pour $k \geqslant 1$,

$$\sigma_k = \inf\{n > \sigma_{k-1} \,:\, X_n \neq X_{n-1}\}.$$

   Est-il vrai que pour tout k, σ_k est un temps d'arrêt pour la filtration $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$? (justifier brièvement votre réponse).
2. Montrer que pour tout k, on a $\mathbf{P}(\sigma_k < \infty) = 1$.
3. On définit une suite $(Y_k)_{k \geqslant 0}$ par $Y_k = X_{\sigma_k}$. Montrer que $(Y_k)_{k \geqslant 0}$ est une chaîne de Markov pour une matrice de transition R que l'on précisera.
4. Montrer qu'un état $x \in S$ est récurrent pour la matrice de transition Q si et seulement si il est récurrent pour la matrice de transition R.